

LES ROUES HYDRAULIQUES PAR DESSUS

PRÉLIMINAIRE D'UNE THÉORIE



LES ROUES HYDRAULIQUES PAR DESSUS

PRÉLIMINAIRE D'UNE THÉORIE

TABLE DES MATIERES

1	INTRODUCTION.....	3
2	CARACTÉRISTIQUES DE BASE D'UNE ROUE PAR DESSUS.....	6
2.1	Grandeurs géométriques et hydrauliques	6
2.2	Puissances et rendements	8
2.3	Analyse qualitative du rendement hydraulique.....	12
2.4	Perspectives de recherche.....	16
3	INFLUENCE DES FORCES CENTRIFUGES	18
3.1	Surface d'équilibre de l'eau dans un godet – théorie approchée.....	18
3.2	Examen d'un cas particulier – cas limite	22
3.3	Rôle du coursier	25
4	REPLISSAGE DES GODETS	29
4.1	Cinématique du remplissage	29
4.2	Géométrie des godets – paramètres de base.....	32
4.3	Approximation parabolique.....	37

1 INTRODUCTION

Les premières machines hydrauliques sont apparues il y a près de 2200 ans, presque simultanément semble-t-il, en Chine et dans le bassin méditerranéen. Leur grande diversité témoigne de l'ingéniosité et du savoir-faire des artisans qui les réalisèrent. Ces machines, en déchargeant l'homme de tâches pénibles et répétitives, jouèrent un rôle essentiel dans la genèse de la révolution industrielle apparue au début du 19^{ème} siècle.

En Europe, avant l'extension généralisée des réseaux électriques, il existait des dizaines de milliers de petites installations hydrauliques, nécessaires au fonctionnement des moulins, scieries, tanneries, papeteries, forges, ateliers de mécanique etc... Si leur nombre a fortement diminué depuis le milieu du 20^{ème} siècle, elles suscitent aujourd'hui un regain d'intérêt important, souvent à caractère émotionnel, auprès du grand public ainsi qu'auprès de nombreux historiens et ingénieurs. Diverses raisons peuvent expliquer ce renouveau: en voici deux:

- La possibilité de réaliser des installations techniquement avancées, plus fiables, de bien meilleur rendement et d'entretien plus facile qu'autrefois;
- La sensibilité écologique croissante de la population, de plus en plus favorable aux énergies renouvelables, ainsi que les incitations correspondantes des pouvoirs publics. En Suisse, par exemple, une disposition fédérale oblige les entreprises chargées de la distribution électrique de reprendre l'énergie produite à partir d'énergie renouvelables, même si cette production n'est pas régulière. De plus, pour les petites centrales hydrauliques dont la puissance ne dépasse pas 1000 kW, le tarif de reprise est fixé de manière à permettre à ces installations d'être viables financièrement.

La présente publication ne concerne que les roues hydrauliques verticales alimentées dans leur partie supérieure. Nous n'avons pas l'intention d'établir ici une classification exhaustive des roues hydrauliques mais quelques rappels sont tout de même utiles.

La figure 1.1¹ représente schématiquement les deux catégories auxquelles appartiennent la quasi totalité des roues hydrauliques (il existe quelques exceptions) :

¹ Les figures sont numérotées par chapitre. Il en sera de même pour les relations algébriques introduites ultérieurement.

- a) Roues dont l'axe de rotation est horizontal, dites « roues verticales », qui utilisent l'énergie de gravitation (énergie potentielle) et l'énergie cinétique de l'eau d'alimentation. Dans ces roues, équipées de godets, l'énergie cinétique joue, le plus souvent, qu'un rôle secondaire ou même négligeable.
- b) Roues dont l'axe de rotation est vertical, appelées « roues horizontales », qui n'utilisent que l'énergie cinétique de l'eau d'alimentation. Elles sont les ancêtres des turbines Pelton.

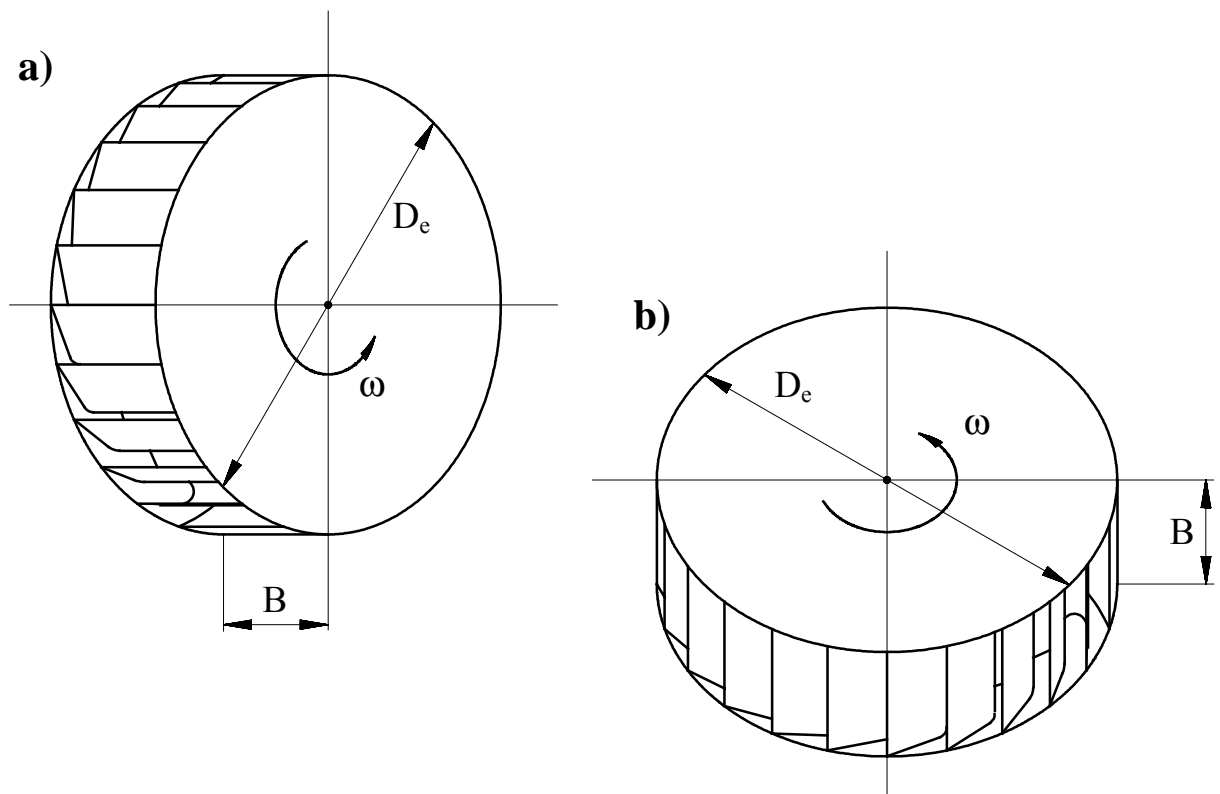


Fig. 1.1 Roues hydrauliques verticales a) et horizontales b) ; ω = vitesse angulaire de rotation, D_e = diamètre extérieur, B = largeur.

En première analyse les roues verticales peuvent être réparties dans les trois sous-catégories schématisées par la figure 1.2.

- a1) L'eau d'alimentation arrive par le haut sur la partie supérieure de la roue au moyen d'un canal d'amenée situé au dessus du diamètre vertical. Les roues de ce type sont appelées « roues par dessus ». Cette appellation est la meilleure, même si elle peut apparaître comme un peu désuète. Les roues par dessus sont dénoyées, ce qui signifie qu'elles tournent à l'air libre.

a2) L'eau d'alimentation arrive latéralement, également au moyen d'un canal d'amenée, à une hauteur inférieure au diamètre de la roue. Dénoyées comme les précédentes, les roues de ce type sont dites « roues par le côté »

a3) Les roues de la troisième sous-catégorie sont partiellement noyées car elles tournent dans l'eau sur une partie significative de leur circonférence. On les appelle « roues par dessous ».

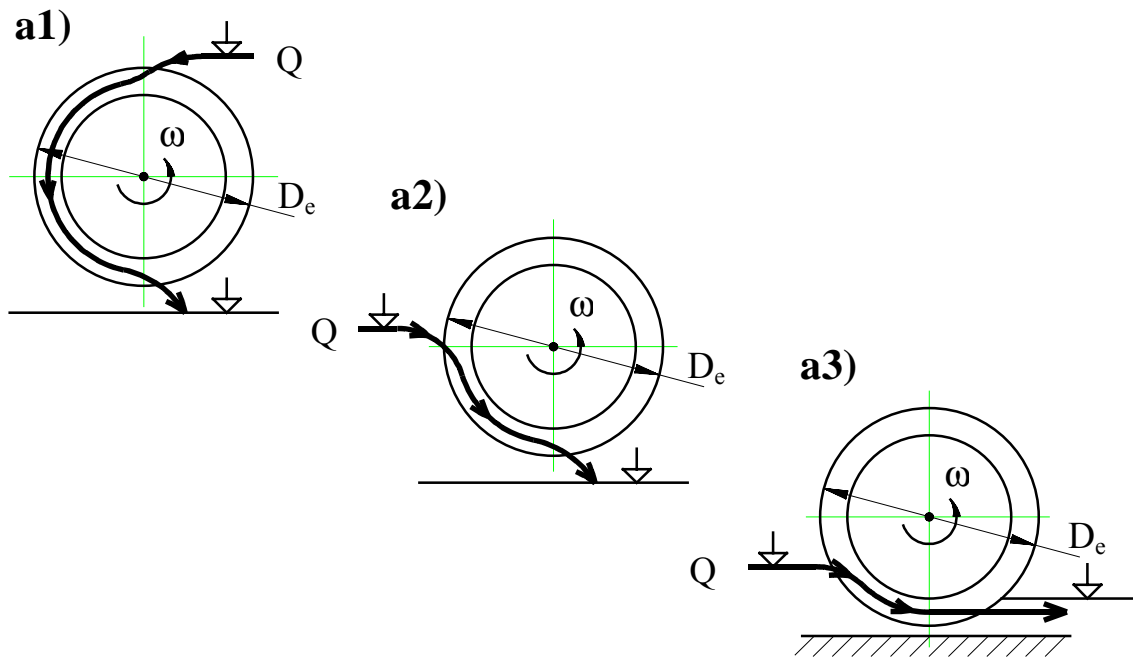


Fig. 1.2 Roues hydrauliques verticales — les trois catégories principales

Pour un même débit Q et un même diamètre extérieur D_e , il est évident que les roues par dessus ont une puissance supérieure à celles des roues de côté ou par dessous, en tout cas dans les conditions d'alimentation représentées sur la figure 1.2. Par ailleurs, ces roues sont les plus nombreuses dans les régions où existe un potentiel hydraulique intéressant, c'est-à-dire les régions de collines et de montagnes. Comme nous l'avons déjà dit, ce sont les seules qui seront prises en considération dans la présente étude.

2 CARACTÉRISTIQUES DE BASE D'UNE ROUE PAR DESSUS

2.1 GRANDEURS GEOMETRIQUES ET HYDRAULIQUES

Une roue hydraulique verticale est une structure tournante dont l'enveloppe extérieure est un cylindre circulaire d'axe horizontal. Au début de notre analyse, nous supposons que les épaisseurs matérielles des éléments de cette structure (flasques, godets, etc...) sont négligeables en comparaison des grandeurs géométriques principales. Bien entendu, cette hypothèse doit être écartée si l'on aborde les problèmes de résistance mécanique de la roue.

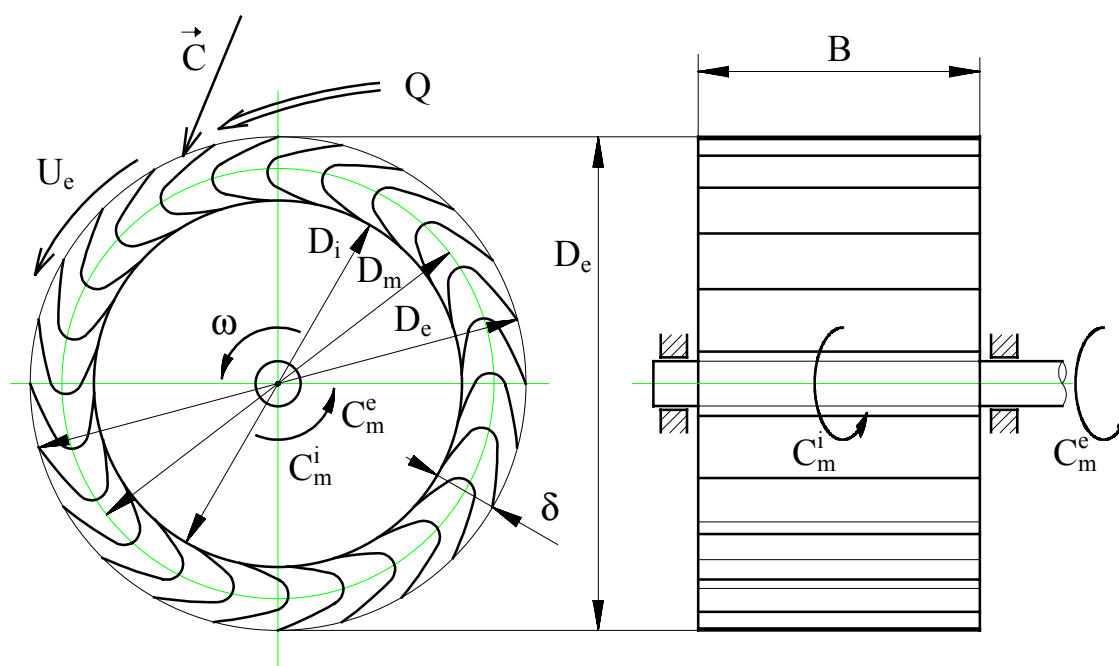


Fig. 2.1 Schéma d'une roue hydraulique par dessus.

Les grandeurs géométriques de base d'une roue verticale par dessus peuvent être introduites en se référant à la figure 2.1. Leurs définitions sont données ci-après.

D_e, R_e = diamètre et rayon extérieurs

D_i, R_i = diamètre et rayon intérieurs

D_m, R_m = diamètre et rayon moyens;

$$D_m = \frac{1}{2}(D_e + D_i), \quad R_m = \frac{1}{2}(R_e + R_i)$$

N_g = nombre de godets

B = largeur de la roue

δ = épaisseur de la couronne de rayons R_e et R_i

(2.1)

Les grandeurs précédentes, mis à part le nombre N_g , sont des longueurs. Elles seront exprimées en mètre (m) dans les applications numériques. De manière plus générale, nous adoptons la convention d'écriture:

$[X]$ = dimension physique de la grandeur X

Dès lors, par exemple, $[B] = \text{mètres} = \text{m}$ signifie que la largeur B est donnée en mètres.

Comme nous le verrons ultérieurement, le volume apparent V_a d'une roue est un paramètre intéressant dans certaines comparaisons. Il a pour valeur

$$V_a = \pi \cdot R_e^2 \cdot B \quad [V_a] = \text{m}^3 \quad (2.2)$$

Il en est de même pour l'aire A_c de la couronne et le volume correspondant V_c . On a successivement:

$$A_c = \pi \cdot (R_e^2 - R_i^2) \quad [A_c] = \text{m}^2 \quad (2.3)$$

mais $(R_e^2 - R_i^2) = (R_e - R_i) \cdot (R_e + R_i) = 2R_m \delta$, d'où

$$A_c = 2\pi R_m \delta \quad (2.4)$$

$$V_c = A_c B \quad [V_c] = \text{m}^3 \quad (2.5)$$

Sur le plan dynamique, les grandeurs de base d'une roue hydraulique sont les suivantes

Q = débit d'alimentation	$[Q] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	(2.6)
\bar{C} = vitesse du jet d'alimentation	$[\bar{C}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$	
ω = vitesse angulaire	$[\omega] = \frac{1}{\text{s}}$	
U_e = vitesse périphérique extérieure	$[U_e] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$	
$U_e = \omega R_e$		
C_m^i = couple mécanique interne	$[C_m^i] = \text{N} \cdot \text{m}$ (Newton · mètre)	
C_m^e = couple mécanique externe	$[C_m^e] = \text{N} \cdot \text{m}$	

Il faut préciser que \bar{C} est la vitesse moyenne dans la section de la veine d'alimentation dont le centre se trouve sur le cercle du rayon R_e (figure 4.1). Cette vitesse est de nature vectorielle car son module et sa direction jouent un rôle.

La puissance et le rendement font partie, bien entendu, des caractéristiques essentielles d'une roue hydraulique, comme pour toute machine ayant pour fonction la production d'énergie. Leurs définitions font l'objet de la section suivante.

2.2 PUISSANCES ET RENDEMENTS

Il n'est pas possible, actuellement, de calculer de manière précise le rendement hydraulique d'une roue à eau sur la base des seuls paramètres constructifs d'une roue existante ou en projet. Les valeurs disponibles proviennent de mesures, effectuées souvent dans des conditions insuffisamment définies et donc difficilement comparables.

Dès lors, nous allons commencer par proposer une définition du rendement, ou plus précisément des rendements, qui soit à la fois, autant que possible, précise et "équitable". Une bonne définition ne doit, ni avantager, ni préteriter les roues hydrauliques dans les comparaisons avec d'autres machines hydrauliques de basse chute.

Les roues hydrauliques sont des machines dont la vitesse de rotation est très faible. A de très rares exceptions près, de nature plutôt historique (marteaux-pilons par exemple), elles doivent être munies d'un multiplicateur de vitesse (à courroies, à engrenages, etc...) dont le rendement doit être pris en compte. Nous adoptons pour la suite la terminologie ci-dessous

$$\begin{array}{l}
 P_h = \text{puissance hydraulique disponible, selon la relation (2.13)} \\
 P_m^i = \text{puissance mécanique interne de la « roue proprement dite »} \\
 P_m^e = \text{puissance mécanique externe de la roue proprement dite =} \\
 \quad \text{puissance sur l'arbre de sortie de la roue} \\
 P_m = \text{puissance mécanique de la « roue système », livrée à l'utilisateur} \\
 \quad \quad \quad [P] = W
 \end{array} \quad (2.7)$$

$$\begin{array}{l}
 \eta_h = \text{rendement hydraulique de la roue proprement dite} \\
 \eta_m' = \text{rendement mécanique de la roue (paliers)} \\
 \eta_m'' = \text{rendement mécanique du multiplicateur de vitesse} \\
 \eta = \text{rendement global de la roue système} \quad [\eta] = (\text{nombre pur})
 \end{array} \quad (2.8)$$

Pour la clarté de l'exposé nous avons distingué la roue proprement dite, au sens de la figure 2.1, de la roue système comportant le multiplicateur de vitesse. On peut dès lors résumer la situation au moyen du schéma de la figure 2.2.

Il existe entre les rendements et les puissances définies ci-dessus les relations évidentes

$$\begin{aligned} P_m^i &= \eta_h P_h \\ P_m^e &= \eta_m' P_m^i = \eta_h \eta_m' P_h \\ P_m &= \eta_m'' P_m^e = \eta_m' \eta_m'' P_m^i = \eta_h \eta_m' \eta_m'' P_h = \eta P_h \end{aligned} \quad (2.9)$$

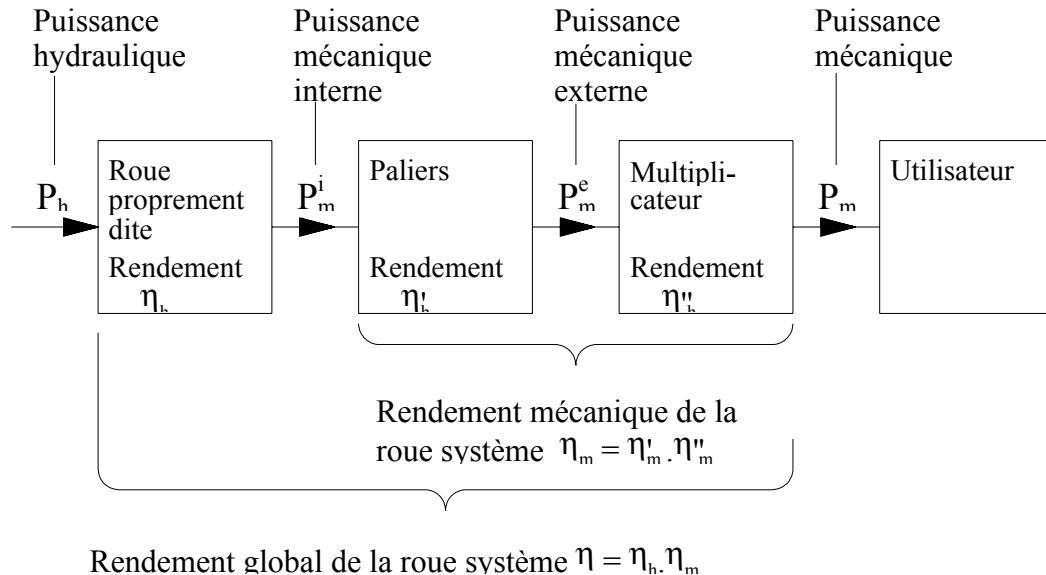


Fig.2.2 Puissances et rendements d'une roue hydraulique.

Le problème du rendement mécanique des multiplicateurs de vitesse, bien qu'important, ne sera pas abordé dans cette étude, consacrée aux seuls aspects hydrauliques. Nous allons maintenant proposer une définition du rendement hydraulique en nous référant à la figure 2.3. La question n'est simple qu'en apparence; en effet, la difficulté réside dans le choix des sections d'entrée et de sortie et de la détermination des vitesses dans ces sections. Voici notre proposition.

La section d'entrée ① est située dans le canal d'amenée, à une distance R_e égale au rayon extérieur de la roue. Cette distance est suffisante pour pouvoir tenir compte de la différence de niveau nécessaire à l'augmentation de vitesse dans la partie terminale du canal, sans imputer à la roue une part excessive des pertes de charge dues aux frottements dans canal d'amenée. Le débit Q est relativement facile à déterminer expérimentalement. Quant à la vitesse, on se bornera pour le moment à supposer qu'elle est uniforme dans toute l'aire A_1 de la section du canal d'amenée, d'où $V_1 = Q/A_1$. On commet ainsi, sur le plan énergétique, une petite erreur qui sera examinée plus tard.

En ce qui concerne la section de sortie ②, nous avons examiné trois possibilités et retenu la dernière:

- (a) La section située à distance R_e du diamètre vertical, par analogie avec le choix fait pour la section d'entrée. Cette solution, à première vue attrayante, présente la difficulté qu'en pratique les conditions d'écoulement en dessous de la roue sont très variables et le plus souvent mal définies: canal quasiment horizontal ou au contraire en forte pente, lit naturel du cours d'eau, etc...

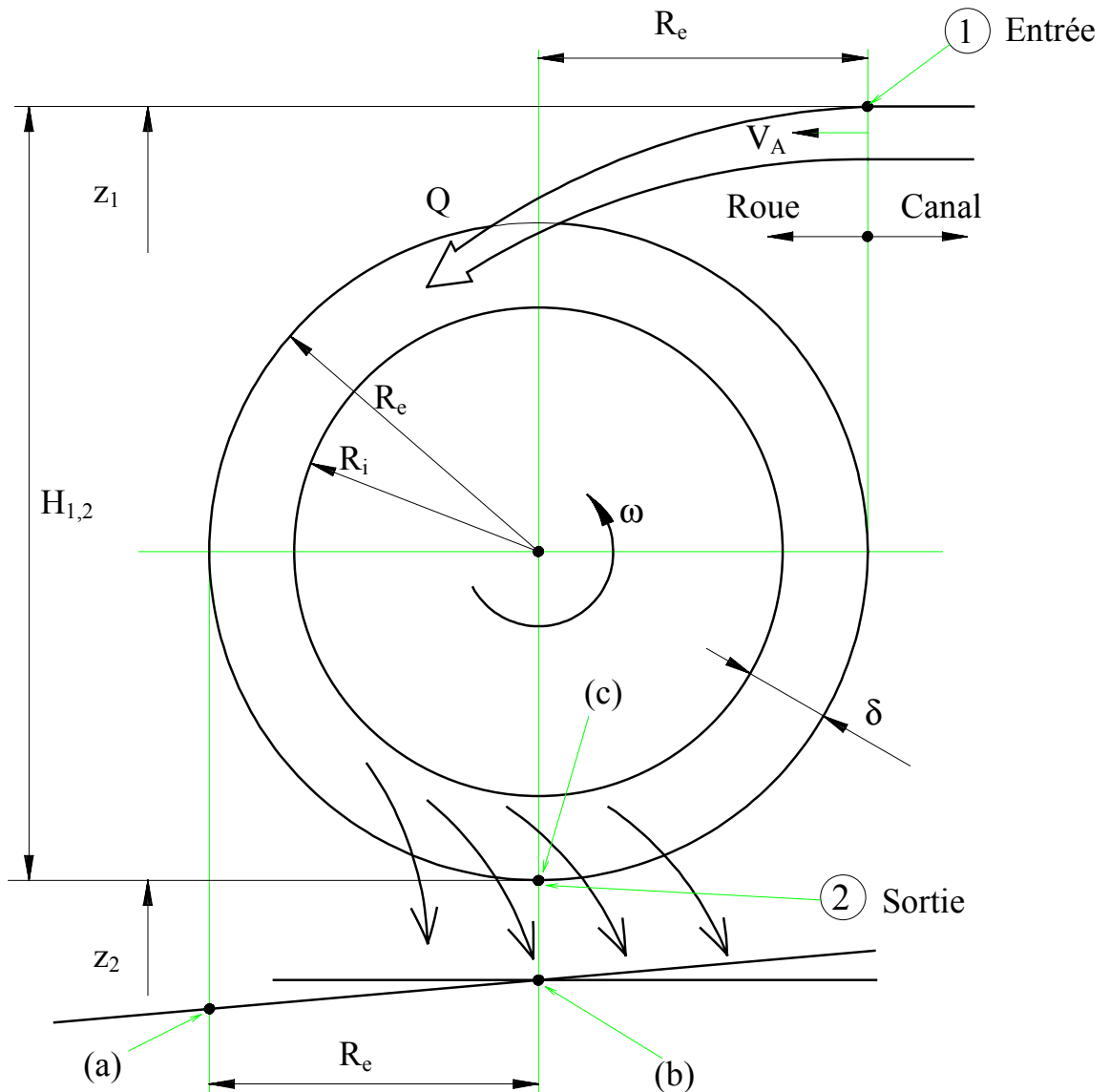


Fig. 2.3 Définition du rendement hydraulique.

- (b) L'intersection du diamètre vertical avec la surface d'écoulement en dessous de la roue. Cette solution présente, bien que de manière atténuée, les mêmes inconvénients que la précédente.

- (c) L'extrémité inférieure du diamètre vertical avec une vitesse V_2 nulle. On pourrait objecter que cette solution est trop favorable sur le plan du rendement hydraulique car une certaine distance verticale, indispensable au bon fonctionnement de la roue, doit être prise en considération. Une telle critique est fondée mais l'avantage d'une situation clairement définie est, à notre avis, déterminante, en particulier afin de permettre des comparaisons valables entre différentes roues (une problématique de même nature existe avec les turbines Pelton).

Commentaire

Il est certain que le choix proposé ci-dessus est arbitraire et que d'autres solutions pourraient être envisagées, comme par exemple une distance conventionnelle $k \cdot \delta$, proportionnelle à l'épaisseur de la couronne, entre le point (C) et la section de sortie ② (resterait à choisir la valeur de k !).

Rendement hydraulique

Rappelons d'abord que l'énergie massique $g H$ contenue dans 1 kg d'eau traversant une machine hydraulique a pour valeur (norme internationale 60041 de la CEI):

$$g H = \frac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2) + g(z_1 - z_2) + \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) \quad [g H] = \frac{\text{Joule}}{\text{kg}} = \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (2.10)$$

Dans cette relation, p_1 et p_2 sont les pressions absolues dans les sections d'entrée et de sortie alors que g et ρ sont respectivement l'accélération terrestre et la masse volumique de l'eau ($g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$, $\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$). En ce qui concerne le cas particulier examiné ici, les pressions p_1 et p_2 sont égales et la vitesse de sortie V_2 est négligée. Dès lors, avec $H_{1,2} = z_1 - z_2$, l'expression précédente se simplifie

$$(g H) = \frac{1}{2}V_1^2 + gH_{1,2} \quad (2.11)$$

ou encore

$$H = \frac{1}{2} \frac{V_1^2}{g} + H_{1,2} \quad [H] = \text{m} \quad (2.12)$$

Cette dernière relation montre que la hauteur H n'est rien d'autre que la différence de niveau $H_{1,2}$, augmentée de la hauteur $H_1' = V_1^2/2g$ proportionnelle à l'énergie cinétique par unité de masse qui traverse la section d'entrée (voir figure 2.4).

En conclusion, la puissance hydraulique disponible P_h et le rendement hydraulique η_h de la figure 2.2 sont respectivement

$$P_h = \rho Q \cdot gH \quad (2.13)$$

$$\eta_h = \frac{P_m^i}{P_h} \quad (2.14)$$

Les méthodes expérimentales, existantes ou envisageables, permettant de mesurer les grandeurs introduites dans ce chapitre feront l'objet d'études ultérieures.

2.3 ANALYSE QUALITATIVE DU RENDEMENT HYDRAULIQUE

Il est utile pour la suite de notre étude de procéder dès maintenant à une première analyse du rendement hydraulique. La figure 2.4 représente une roue hydraulique par dessus, les sections d'entrée ① et de sortie ② étant situées aux endroits choisis précédemment. D'autre part, sont indiqués sur la même figure les points ci-après.

Point E' : Il s'agit du point ① surélevé de la hauteur $H'_1 = V_1^2/2g$ proportionnelle à l'énergie cinétique traversant la section d'entrée.

Point A : Intersection de la ligne moyenne de la veine d'alimentation avec la circonférence de rayon R_e .

Point M : Il correspond à la position où le remplissage des godets est terminé. Au stade actuel de l'étude, cette position ne peut être située que de manière approchée.

Point N : Avec la même restriction que ci-dessus, il correspond à la position où commence le processus de vidage des godets.

L'emplacement des points M et N dépend de la vitesse angulaire de la roue, de la vitesse circonférentielle extérieure, de l'épaisseur de la couronne, du nombre et de la forme des godets. Par ailleurs, la vitesse et l'angle d'injection sont importants pour le point M ainsi que la présence éventuelle d'un « coursier » pour le point N (un coursier est une plaque cylindrique limitant les pertes d'eau dans la partie inférieure de la roue — voir figure 3.2).

Revenons à la relation (2.13) concernant la puissance hydraulique de la roue:

$$P_h = \rho Q \cdot gH .$$

Cette puissance est proportionnelle à la hauteur $H = H_{1,2} + H'_1$ indiquée sur la figure 2.4.

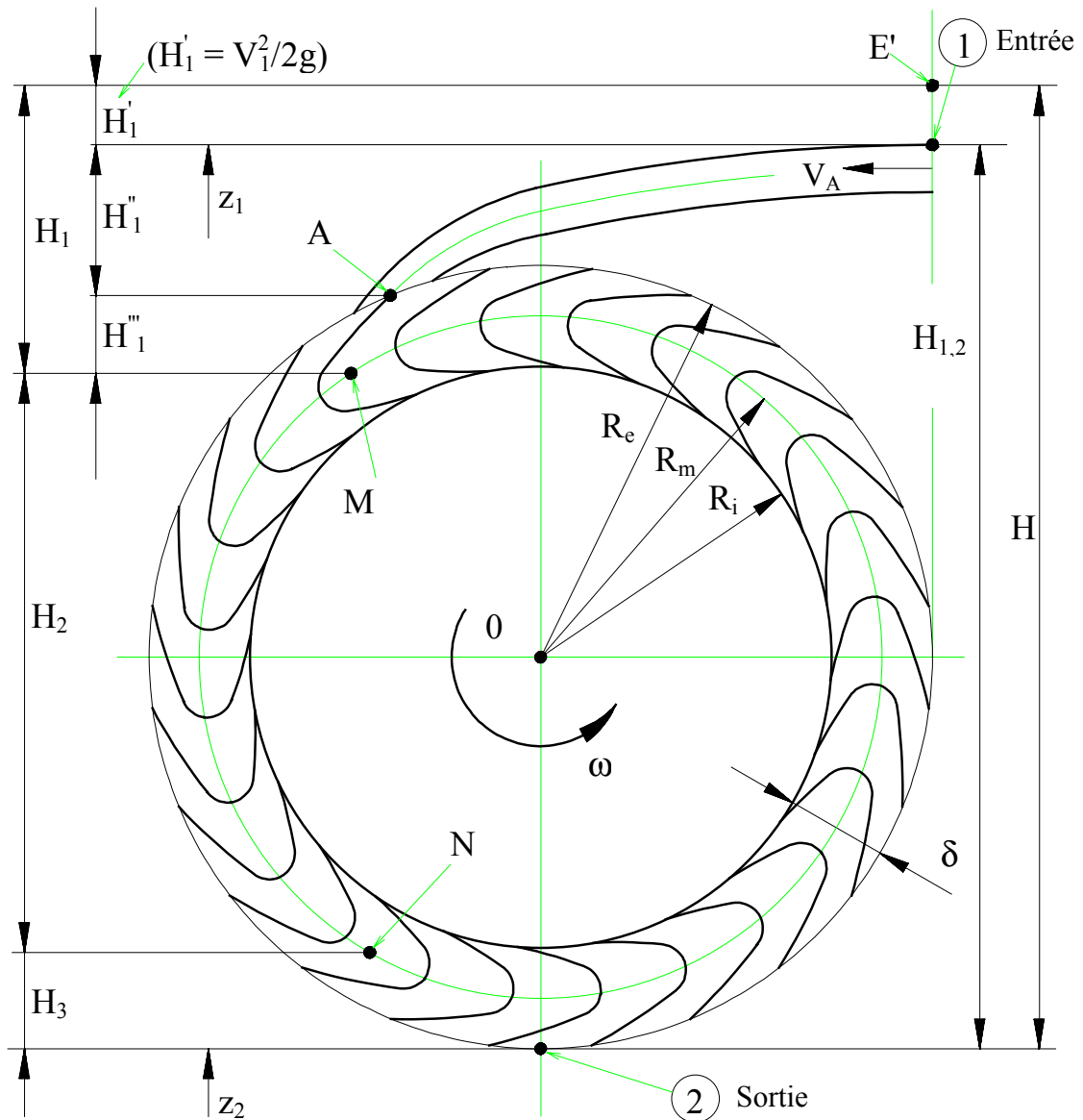


Fig. 2.4 Analyse qualitative du rendement hydraulique.

Dans le but de faciliter l'analyse qualitative du rendement hydraulique, séparons la hauteur H en trois parties

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \text{hauteur d'alimentation; c'est la différence entre les niveaux} \\
 &\quad \text{des points } E' \text{ et } M \\
 H_2 &= \text{hauteur du « comportement gravitationnel » de la roue} \\
 H_3 &= \text{hauteur correspondant au processus de vidage des godets}
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

La hauteur d'alimentation H_1 comporte elle-même trois parties :

$$\begin{aligned}
 H_1' &= \text{hauteur correspondant à l'énergie cinétique traversant la} \\
 &\quad \text{section d'entrée} \\
 H_1'' &= \text{différence entre le niveau de l'entrée } \textcircled{2} \text{ et celui du point } A \\
 H_1''' &= \text{différence entre les niveaux des points } A \text{ et } M \text{ définis précédemment}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Si l'on affecte aux trois hauteurs H_1 , H_2 , H_3 ou plus exactement aux énergies correspondantes, les rendements hydrauliques η_{h1} , η_{h2} , η_{h3} , le rendement hydraulique de la roue peut s'écrire

$$\eta_h = \frac{1}{H}(\eta_{h1}H_1 + \eta_{h2}H_2 + \eta_{h3}H_3) \quad (2.17)$$

Le rendement η_{h1} de la zone d'alimentation est faible car la transformation de l'énergie cinétique de la veine d'alimentation en puissance sur l'arbre se fait mal dans une roue hydraulique (contrairement aux turbines Pelton). Dans les deux exemples de principe examinés ci-après, nous admettrons $\eta_{h1} = 50\%$.

Par contre, le rendement η_{h2} est beaucoup plus élevé, proche probablement de 100 % pour les roues à très faible vitesse de rotation. Supposons pour le moment $\eta_{h2} = 95\%$.

Le processus de vidage, particulièrement compliqué sur le plan hydrodynamique, correspond comme celui d'alimentation à un rendement médiocre. Nous retenons $\eta_{h3} = 60\%$

Par analogie avec plusieurs roues hydrauliques réelles examinées, mais non mesurées à part les dimensions géométriques principales, nous allons estimer le rendement hydraulique dans deux cas particuliers typiques.

Type I — Exemple de principe d'une roue de grand diamètre et de faible puissance

a) Dimensions selon relations (2.1) et (2.2)

$$\begin{aligned} R_e &= 3 \text{ m} & R_i &= 2,7 \text{ m} & R_m &= 2,85 \text{ m} & \delta &= 0,3 \text{ m} \\ B &= 1,2 \text{ m} & N_g &= 60 \text{ godets} & V_a &= 34 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

b) Grandeurs dynamiques

$$\begin{aligned} n &= 5 \text{ tours/min} \rightarrow \omega = 0,52 \text{ s}^{-1} & \text{Débit : } Q &= 0,15 \text{ m}^3/\text{s} \\ \text{Vitesse d'entrée } C_1 &= 1,5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

c) Hauteurs selon relation (2.15) (valeurs estimées)

$$H_1 = 0,9 \text{ m} \quad H_2 = 5 \text{ m} \quad H_3 = 0,6 \text{ m} \quad H = 6,5 \text{ m}$$

d) Rendement hydraulique selon relation (2.17)

$$\eta_h = \frac{1}{6,5} \cdot (0,9 \times 0,5 + 5 \times 0,95 + 0,6 \times 0,6) = 86\%$$

e) Puissances

Puissance hydraulique:

$$P_h = \rho Q g H = 1000 \times 0,15 \times 9,81 \times 6,5 \approx 9,6 \text{ kW}$$

Puissance mécanique interne:

$$P_m^i = \eta_h P_h = 0,86 \times 9,6 = 8,3 \text{ kW}$$

Calculons encore la « puissance mécanique interne volumique »

$$P_{mv}^i = \frac{P_m^i}{V_a} = \frac{8,3}{34} = 0,24 \text{ kW/m}^3$$

Type II Exemple de principe d'une roue "rapide" de faible diamètre et de forte puissance

a) Dimensions

$$R_e = 1,2 \text{ m} \quad R_i = 0,8 \text{ m} \quad R_m = 1,0 \text{ m} \quad \delta = 0,4 \text{ m}$$

$$B = 2,5 \text{ m} \quad N_g = 20 \text{ godets} \quad V_a = 11,3 \text{ m}^3$$

b) Grandeurs dynamiques

$$n = 20 \text{ tours/min} \rightarrow \omega = 2,09 \text{ s}^{-1} \quad \text{Débit : } Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Vitesse d'entrée } C_1 = 3 \text{ m/s}$$

c) Hauteurs (valeurs estimées)

$$H_1 = 1,1 \text{ m} \quad H_2 = 1,6 \text{ m} \quad H_3 = 0,4 \text{ m} \quad H = 3,1 \text{ m}$$

d) Rendement hydraulique

$$\eta_h = \frac{1}{3,1} (1,1 \times 0,5 + 1,6 \times 0,95 + 0,4 \times 0,6) = 75 \%$$

e) Puissances

Puissance hydraulique:

$$P_h = 1000 \times 1 \times 9,81 \times 3,1 \approx 30 \text{ kW}$$

Puissance mécanique interne:

$$P_m^i = 0,75 \times 30 = 22,5 \text{ kW}$$

Puissance mécanique interne volumique:

$$P_{mv}^i = \frac{22,5}{11,3} = 2,0 \text{ kW/m}^3$$

Commentaire

Malgré le choix assez arbitraire des rendements η_{h1} , η_{h2} , η_{h3} et le caractère approximatif des hauteurs H_1 , H_2 , H_3 , les deux exemples examinés ci-dessus permettent déjà de tirer quelques conclusions.

- 1) Les roues du type I, lentes et de grand diamètre, possèdent un rendement hydraulique élevé car la hauteur H_2 du comportement favorable (comportement gravitationnel) représente une part importante de la hauteur totale H .
- 2) Cette part étant nettement plus faible pour les roues du type II, rapides et de petit diamètre, le rendement hydraulique s'en trouve diminué.
- 3) Par contre, la puissance mécanique interne volumétrique des roues du type I est en général très inférieure à celle des roues du type II. Dans les cas particuliers examinés ici, le rapport des puissances volumiques est de 1 à 8.
- 4) Les affirmations ci-dessus doivent être, bien entendu, affinées par des mesures nombreuses dans des cas réels. Cependant, nous pensons qu'elles resteront valables pour l'essentiel.

2.4 PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Nous allons conclure ce chapitre, consacré aux caractéristiques de base des roues par dessus, en proposant quelques thèmes de recherche. L'objectif principal doit être le développement d'une technologie permettant de construire des roues rapides, de dimensions réduites, ayant un rendement élevé. La réalisation de cet objectif favoriserait grandement le renouveau des roues hydrauliques.

- 1) Etude de l'influence du nombre et de la forme des godets sur la récupération de l'énergie cinétique du jet d'alimentation, et ceci en fonction de la vitesse du jet, de la vitesse périphérique extérieure de la roue, des forces centrifuges et de la présence d'air dans les godets.
- 2) Etude du processus de vidage de la roue, sans et avec la présence d'un coursier, en fonction également du nombre et de la forme des godets et compte tenu des forces centrifuges.

3) Recherche du compromis optimum, sur le plan du rendement hydraulique, entre les exigences résultant des points 1) et 2) ci-dessus. En effet, certaines d'entre elles seront contradictoires.

Nous espérons que des moyens expérimentaux et d'analyse suffisants pour aborder les recherches proposées pourront être réunis. En attendant, nous allons traiter quelques thèmes secondaires, en particulier :

- l'influence des forces centrifuges
- le rôle des coursiers
- la cinématique du remplissage des godets
- les paramètres principaux relatifs à la géométrie des godets.

3 INFLUENCE DES FORCES CENTRIFUGES

3.1 SURFACE D'EQUILIBRE DE L'EAU DANS UN GODET – THEORIE APPROCHEE

Considérons un godet d'une roue hydraulique de centre O , tournant à vitesse angulaire constante ω et soit M un point de la surface d'équilibre de l'eau contenue dans le godet. Ce point est situé à distance R du centre de la roue (figure 3.1).

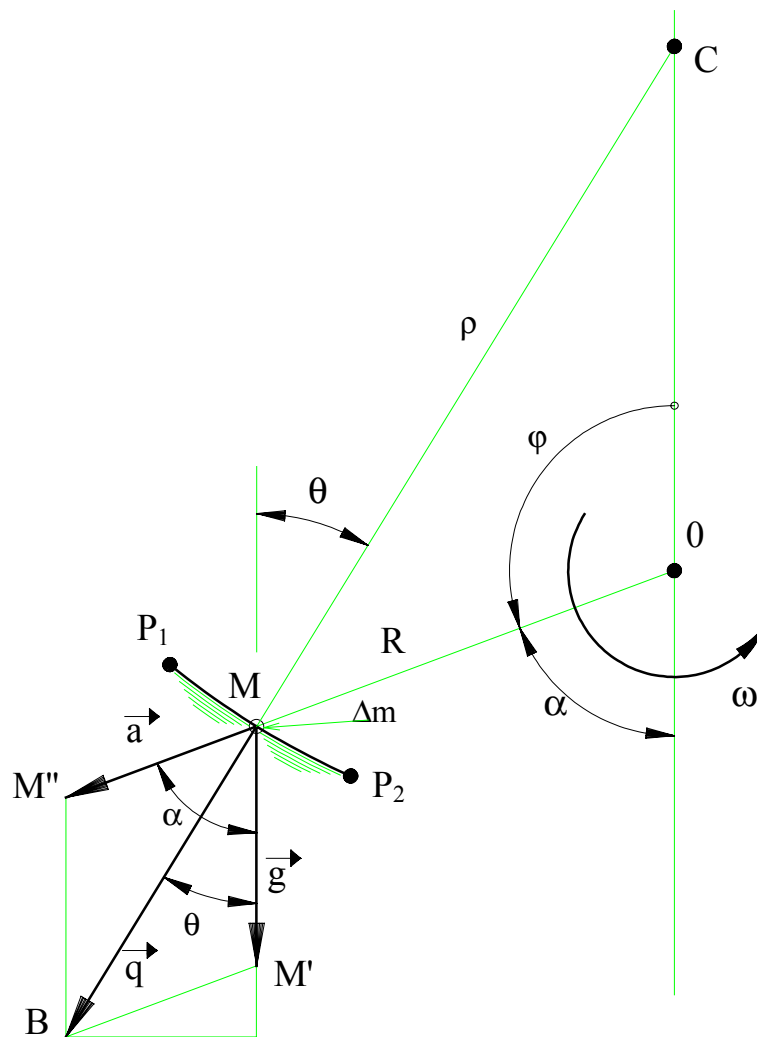


Fig. 3.1 Surface d'équilibre de l'eau contenue dans un godet.

Un élément de masse Δm au point M subit une force de gravitation verticale $\Delta m \cdot \vec{g}$ et une force d'inertie - centrifuge - $\Delta m \cdot \vec{a}$ dans la direction du rayon MO avec $a = [\vec{a}] = R \cdot \omega^2$.

La force résultante $\Delta m \cdot \vec{q} = \Delta m \cdot (\vec{g} + \vec{a})$ a comme support la droite MB , droite qui coupe l'axe vertical au point C . Les triangles $MM''B$ et MOC sont semblables, ce qui entraîne l'égalité

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{M''B}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{MM''}} \Rightarrow \overline{OC} = \frac{\overline{MO} \cdot \overline{M''B}}{\overline{MM''}} = \frac{R \cdot g}{R\omega^2}$$

Ainsi, la distance \overline{OC} est indépendante du rayon R

$$\overline{OC} = \frac{g}{\omega^2} \quad (3.1)$$

Cette distance est également indépendante de l'angle φ qui définit la position du godet dans la roue. Cela signifie que dans tous les godets la figure d'équilibre de l'eau est une surface cylindrique circulaire dont l'axe, parallèle à l'axe de rotation de la roue, passe par le même point C (nous verrons plus loin pourquoi cette affirmation n'est pas strictement exacte).

Il est commode pour la suite d'introduire le rapport sans dimension

$$\mu = \frac{a}{g} = \frac{R\omega^2}{g} \quad (3.2)$$

La relation (3.1) devient ainsi

$$\overline{OC} = \frac{R}{\mu} \quad (3.3)$$

La figure 3.1 montre que :

$$\left. \begin{aligned} q \sin \theta &= a \sin \alpha \\ q \cos \theta &= g + a \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$

Ces deux relations permettent de calculer les inconnues θ et q soit, compte tenu de (3.2)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\mu \sin \alpha}{1 + \mu \cos \alpha} \quad (3.4)$$

$$q = g \sqrt{1 + \mu^2 + 2\mu \cos \alpha} \quad (3.5)$$

Si l'on préfère utiliser l'angle φ , les résultats ci-dessus s'écrivent ($\alpha = \pi - \varphi$):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\mu \sin \alpha}{1 - \mu \cos \alpha} \quad (3.6)$$

$$q = g \sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu \cos \alpha} \quad (3.7)$$

Quand le godet se trouve en position supérieure, l'angle φ est nul et l'on a

$$\theta = 0$$

$$q = g(1 - \mu) = g - R\omega^2$$

On retrouve un résultat de bon sens : en position haute l'accélération centrifuge $R\omega^2$ est de sens opposé à l'accélération de la pesanteur g . Il est intéressant de signaler, même si cela n'est pas possible avec le type de roues considérées, que si la vitesse angulaire était supérieure à $\sqrt{g/R}$, l'eau entrante serait projetée vers le haut (pour une roue de 2m de rayon, cela correspond à une vitesse de rotation de 0,7 tour par seconde, soit 42 tours par minute).

Quand le godet se trouve en position basse $\varphi = \pi$ et (3.6) et (3.7) deviennent

$$\theta = 0$$

$$q = g \cdot (1 + \mu) = g + R\omega^2$$

Dans cette position, l'accélération centrifuge s'ajoute à la pesanteur ce qui facilite le vidage des godets.

Revenons à la figure 3.1 pour calculer le rayon ρ de la surface d'équilibre de l'eau. Il est donné par le rapport

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{MM'}} \Rightarrow \frac{\rho}{q} = \frac{R}{R\omega^2} \Rightarrow \rho = \frac{q}{\omega^2}$$

soit, en remplaçant q par sa valeur (3.7)

$$\rho = \frac{g}{\omega^2} \sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu \cos \varphi} \quad (3.8)$$

Caractère approché de la théorie précédente

En remplaçant le coefficient μ par sa valeur $R\omega^2/g$ dans la relation (3.8) on obtient

$$\rho = \frac{1}{\omega^2} \sqrt{g^2 + R^2\omega^4 - 2gR\omega^2 \cos \varphi} \quad (3.9)$$

Pour la surface d'équilibre dans un godet déterminé, l'angle φ et le rayon R ne sont pas des constantes mais varient légèrement. Dès lors le rayon de courbure ρ est une fonction de la position du point M dans le godet (voir figure 3:1).

$$\rho = f(M) = f(R)$$

Si ρ n'est pas constant, la surface d'équilibre de l'eau n'est pas un cylindre circulaire, comme nous l'avons affirmé plus haut. D'où provient la contradiction? Elle est due au fait que cette surface n'est pas statiquement déterminée et qu'elle se déforme lors de la rotation de la roue. Sa courbure diminue du haut vers le bas. La recherche d'une solution exacte de ce problème est difficile et n'en vaut pas la peine. En effet, la distance entre les points P_1 et P_2 étant petite relativement au rayon moyen R_m (elle est pratiquement égale à l'épaisseur δ de la couronne), il en est de même pour la différence entre les rayons de courbure $\rho_1 = \rho(P_1)$ et $\rho_2 = \rho(P_2)$ avec le rayon de courbure $\rho_m = \rho(M)$. Nous nous bornerons ci-dessous à examiner l'influence de R sur la valeur de ρ .

Reprenons les deux exemples de principe examinés à la section 2.3 en choisissant un angle $\varphi = 135^\circ \Rightarrow \cos\varphi = -0,707$. Comme seuls les ordres de grandeur sont intéressants ici, on se contentera d'admettre, ce qui est d'ailleurs très proche de la réalité dans la zone de $\varphi = 135^\circ$, que $R(P_1) = R_1 \approx R_e$ et $R(P_2) = R_2 \approx R_i$

Type I Roue lente de grand diamètre

$$\begin{aligned} R_m &= 2,85 \text{ m} & R_1 &= 3 \text{ m} & R_2 &= 2,7 \text{ m} \\ n &= 5 \text{ t/min} & \Rightarrow & \omega &= 0,524 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

On calcule facilement, au moyen de la relation (3.9):

$$\begin{aligned} \rho_m &= 37,87 \text{ m} & \rho_1 &= 37,98 \text{ m} & \rho_2 &= 37,76 \text{ m} \\ \frac{\rho_1}{\rho_m} &= 1,003 & \frac{\rho_2}{\rho_m} &= 0,997 \end{aligned}$$

Ces résultats montrent, dans le cas particulier d'une roue du type I, que les différences entre les rayons de courbure ρ_1 , ρ_2 , ρ_m sont insignifiantes et que, par ailleurs, la surface d'équilibre de l'eau dans les godets est pratiquement plane (rayon de courbure de 38m). En d'autres termes, l'influence des forces centrifuges est très faible.

Type II Roue rapide de faible diamètre

$$\begin{aligned} R_m &= 1 \text{ m} & R_1 &= 1,2 \text{ m} & R_2 &= 0,8 \text{ m} \\ n &= 20 \text{ t/min} & \Rightarrow & \omega &= 2,094 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \rho_m &= 3,03 \text{ m} & \rho_1 &= 3,20 \text{ m} & \rho_2 &= 2,86 \text{ m} \\ \frac{\rho_1}{\rho_m} &= 1,056 & \frac{\rho_2}{\rho_m} &= 0,944 \end{aligned}$$

Si, dans le cas des roues rapides, les différences entre les rayons de courbure restent faibles ($\pm 6\%$ environ) et que l'on peut toujours admettre que la surface d'équilibre est un cylindre circulaire, l'influence des forces centrifuges se fait nettement sentir ainsi que va le confirmer, à la section suivante, la suite de l'analyse du même exemple.

Conclusion

La théorie développée au début de ce chapitre, bien qu'approchée, est tout à fait suffisante pour juger de l'influence des forces centrifuges sur la surface d'équilibre de l'eau contenue dans les godets d'une roue hydraulique par dessus.

3.2 EXAMEN D'UN CAS PARTICULIER – CAS LIMITE

Revenons à l'exemple de principe d'une roue rapide de faible diamètre (type II) ayant les caractéristiques

$$\begin{aligned} R_m &= 1,0 \text{ m} & R_1 &= 1,2 \text{ m} & R_2 &= 0,8 \text{ m} & \delta &= 0,4 \text{ m} \\ n &= 20 \text{ t/min} & \Rightarrow \omega &= 2,094 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

On calcule le coefficient μ de la relation (3.2)

$$\mu = \frac{a}{g} = \frac{R_m \omega^2}{g} = \frac{4,385}{9,81} = 0,447$$

puis, par (3.3), la distance entre le centre O et le centre de courbure C

$$\overline{OC} = \frac{R_m}{\mu} = \frac{1,0}{0,447} = 2,24 \text{ m}$$

La figure 3.2 représente les surfaces d'équilibre de l'eau dans les godets qui sont, comme nous l'avons montré ci-dessus, des cylindres circulaires de rayon ρ dont l'axe commun, passant par C , est parallèle à l'axe de rotation de la roue passant par O . Dans cet exemple, on a supposé la présence d'un coursier, ce qui est généralement le cas pour les roues rapides. Il est clair que dans les zones d'alimentation et de vidage la situation réelle est plus compliquée que ne le montre cette figure de principe.

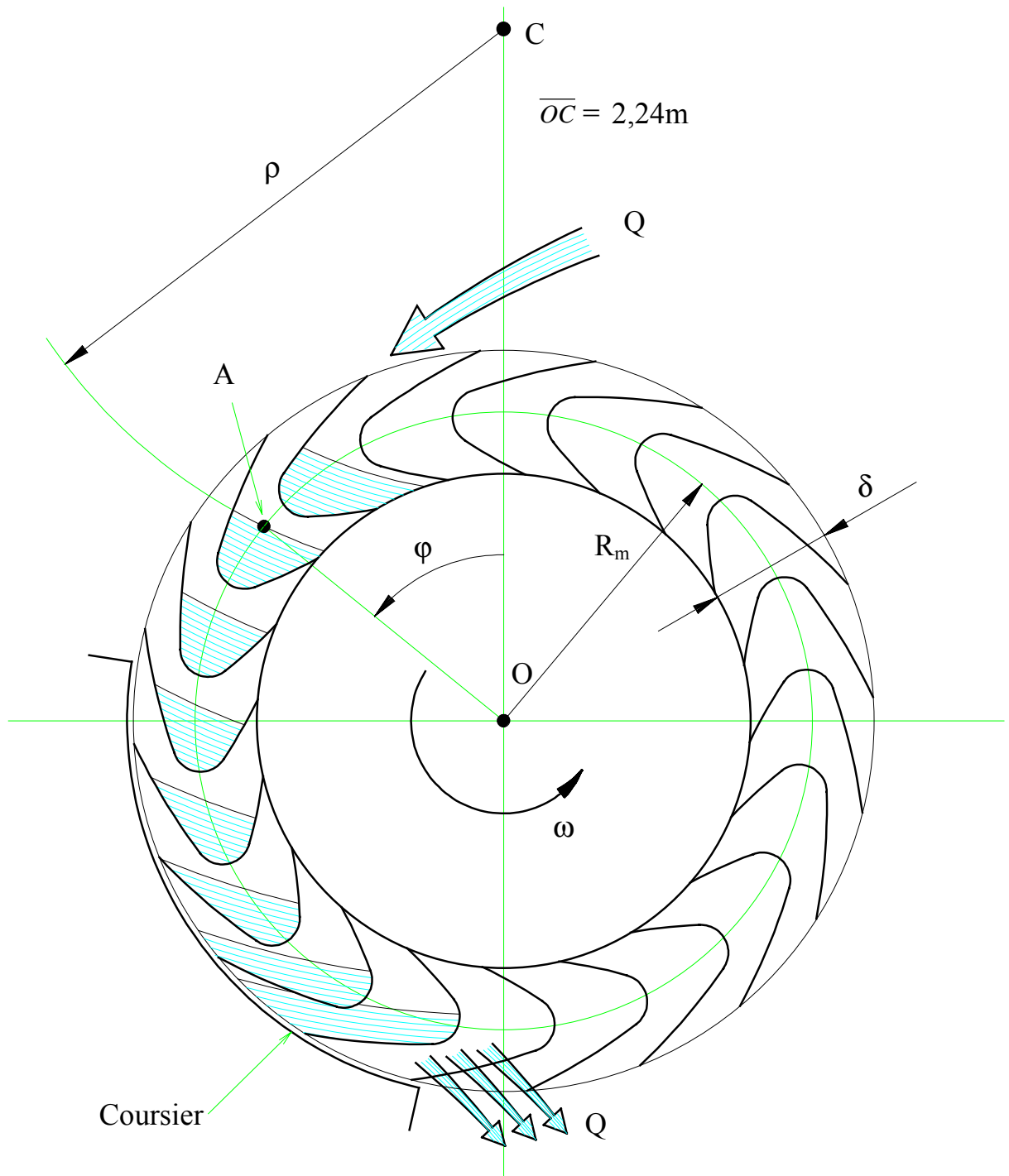


Fig. 3.2 Surfaces d'équilibre de l'eau dans les godets — Exemple de principe
 $R_m = 1,0 \text{ m}$, $\delta = 0,4 \text{ m}$, $\omega = 2.094 \text{ s}^{-1}$, échelle 1:20

Comme nous l'avons déjà dit, la courbure des surfaces d'équilibre diminue du haut vers le bas. Voici, d'après (3.8), pour $R_m = 1,0 \text{ m}$ et $\mu = 0,447$, trois valeurs particulières du rayon de courbure.

$$\varphi = 0 \quad \rho = R_m \frac{1-\mu}{\mu} = 1,24 \text{ m}$$

$$\varphi = \pi/2 \quad \rho = R_m \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu} = 2,45 \text{ m}$$

$$\varphi = \pi \quad \rho = R_m \frac{1+\mu}{\mu} = 3,24 \text{ m}$$

En résumé, les forces centrifuges rendent plus difficile le remplissage des godets alors qu'elles facilitent leur vidage. Il faut tenir compte de ce phénomène dans le choix du profil des godets ainsi que pour l'installation éventuelle d'un coursier.

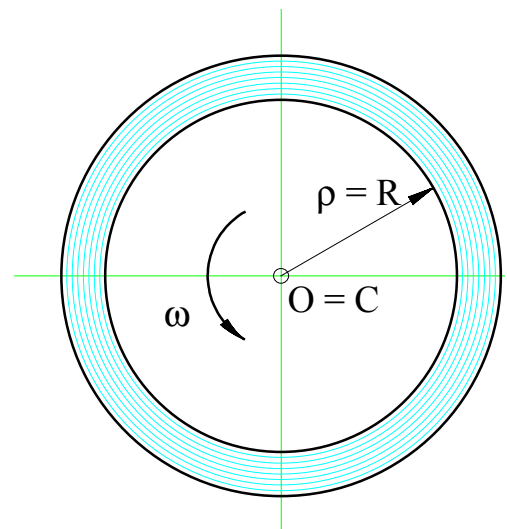
Signalons encore que sur le plan des principes de la mécanique une force d'inertie, telle que $\Delta m \cdot a = \Delta m \cdot R \omega^2$ de la figure 3.1, ne peut ni produire ni détruire de l'énergie.

Dans notre cas particulier cela est facile à vérifier puisque cette force, dont le support passe par le centre de rotation, ne peut pas modifier le couple de la roue. Ceci, bien entendu, sous réserve d'effets "collatéraux" comme d'éventuelles pertes d'eau entraînées par la modification de la surface d'équilibre.

Cas limite

Revenons à la relation (3.1) qui donne la distance entre le centre de rotation et le centre de courbure $\overline{OC} = g/\omega^2$. Elle montre que si la vitesse de rotation ω est très grande, cette distance est négligeable et les deux centres coïncident au point O. Dans ce cas, évidemment, il ne s'agit plus d'une roue à eau mais d'un cylindre contenant un liquide et tournant rapidement autour d'un axe horizontal (figure 3.3). Par ailleurs $\rho = R$ comme le confirme la relation (3.8). En effet, si $\mu = R\omega^2/g \rightarrow \infty \Rightarrow \rho = R/\mu \sqrt{\mu^2} = R$. En d'autres termes, le rôle de la pesanteur est négligeable si la vitesse est grande (on rencontre de telles circonstances en chimie technique).

Fig. 3.3 Cylindre contenant un liquide et tournant à grande vitesse autour d'un axe horizontal



3.3 ROLE DU COURSIER

Nous avons déjà signalé qu'on appelle « coursier », ou plus précisément dans notre cas « coursier inférieur », une paroi cylindrique ayant pour fonction de limiter les pertes d'eau dans la partie inférieure d'une roue par dessus ayant une vitesse de rotation élevée. Afin de bien comprendre le rôle d'un tel dispositif commençons par examiner le cas plus simple d'un réservoir, de poids négligeable ou compensé, contenant une masse d'eau M et se déplaçant vers le bas à vitesse constante V (figure 3.4). Le réservoir est suspendu à un fil dont la tension T est égale au poids Mg . (Il est clair que T serait inférieure à Mg en phase d'accélération, alors que ce serait l'inverse en phase de freinage.)

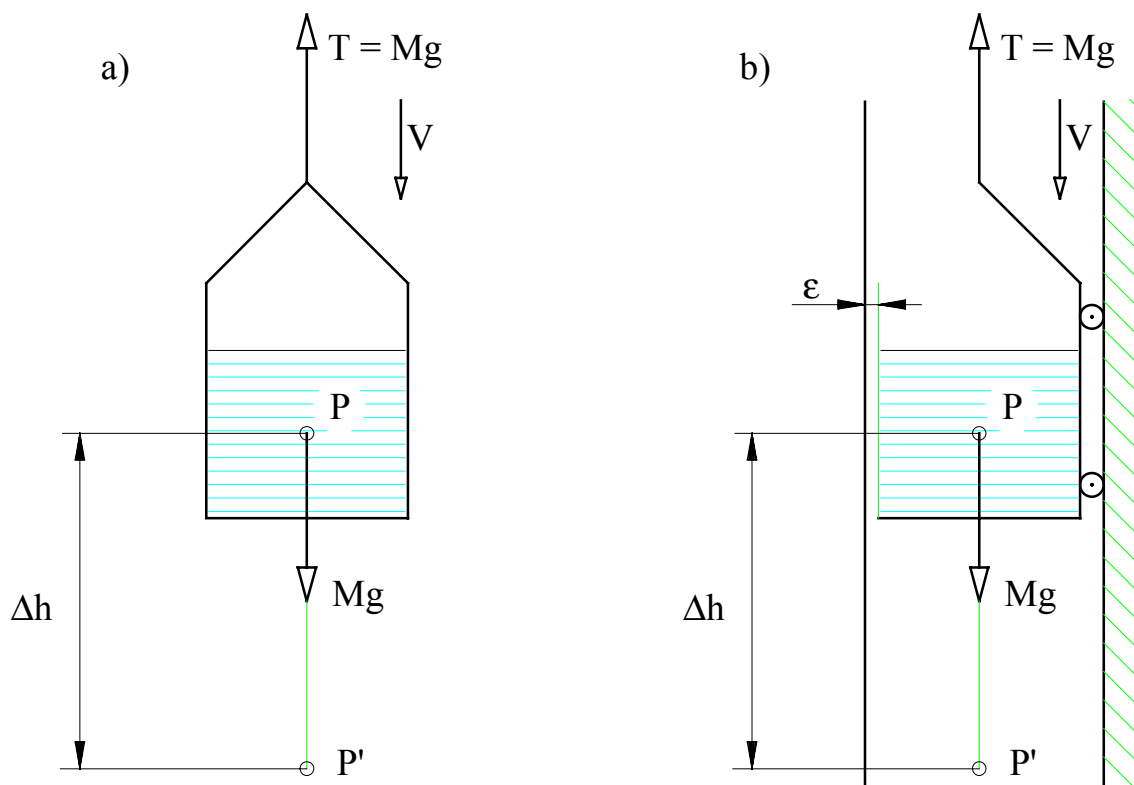


Fig. 3.4 Réservoir en déplacement vertical.

Si le réservoir descend d'une hauteur $\overline{PP'} = \Delta h$, il fournit un travail

$$\Delta\tau = \Delta h Mg$$

Ce déplacement ayant une durée

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{V}$$

la puissance correspondante est donc

$$P = \frac{\Delta \tau}{\Delta t} = MgV$$

Supposons maintenant que l'on supprime la paroi de gauche du réservoir et qu'on la remplace par une paroi verticale, mais fixe, à très petite distance ε . Il en résulte une poussée vers la droite, ce qui nécessite un guidage pour assurer l'équilibre horizontal, mais cela ne change rien à l'équilibre vertical et donc au travail $\Delta \tau$ et à la puissance P mentionnés ci-dessus.

Sur le plan technique, bien entendu, il est impossible que la distance ε soit nulle ce qui va provoquer des pertes d'eau. Ces pertes, ainsi que le frottement de l'eau sur la paroi fixe, vont entraîner une certaine baisse de la puissance. En résumé, le remplacement d'une paroi verticale du réservoir par une paroi fixe n'entraîne que des effets du second ordre.

Considérons maintenant le godet isolé, représenté par la figure 3.5, ayant la forme schématique d'un secteur de couronne. Il tourne à vitesse angulaire ω et contient une masse d'eau M dont le centre de gravité P se trouve à distance $R = \overline{OP}$ du centre de rotation. Comme nous l'avons montré précédemment, la surface d'équilibre de l'eau est cylindrique.

Le couple en O dû au poids Mg a pour valeur:

$$C = M g R \sin \alpha$$

Lors d'une rotation $\Delta \alpha$, le centre P se déplace en P' et le couple fournit un travail

$$\Delta \tau = C \Delta \alpha = M g R \sin \alpha \Delta \alpha$$

Cette rotation ayant une durée

$$\Delta t = \frac{\Delta \alpha}{\omega}$$

la puissance correspondante est ainsi

$$P = \frac{\Delta \tau}{\Delta t} = M g R \omega \sin \alpha$$

La puissance est donc fonction de l'angle α , elle est maximale en position horizontale du godet: $\alpha = \pi/2 \rightarrow \sin \alpha = 1$.

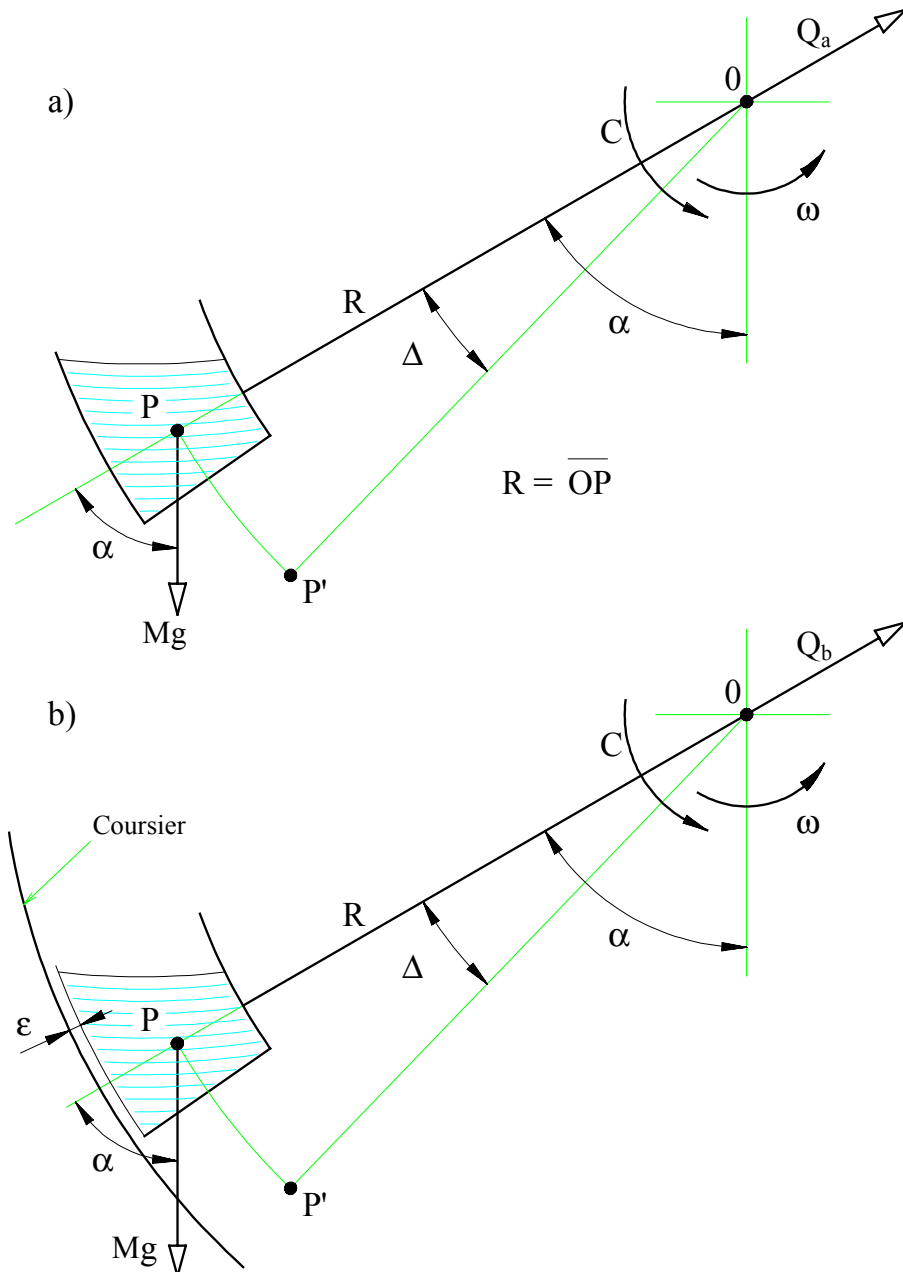


Fig. 3.5 Godet schématique en rotation.

Remarquons que l'on aurait pu calculer le travail comme suit:

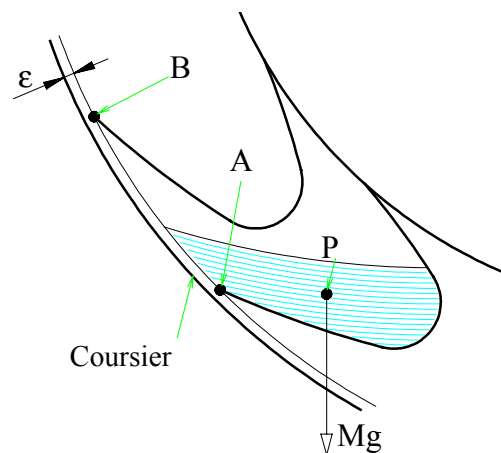
$$\Delta\tau = Mg \times \overline{PP'} \sin\alpha = Mg R \Delta\alpha \sin\alpha$$

De manière analogue à ce que nous avons fait précédemment pour le réservoir en déplacement vertical, supprimons par la pensée la paroi extérieure du godet et remplaçons-la par une paroi cylindrique fixe, autrement dit par un coursier (figure 3.5b). Si la distance ϵ est très petite, l'emplacement du centre de gravité ne change pas et les expressions ci-dessus du travail, du couple et de la puissance restent valables. Dès lors, la conclusion précédente est en substance maintenue et devient: le remplacement de la paroi extérieure par une paroi cylindrique fixe n'entraîne que des effets du second ordre. Il faut cependant remarquer que

dans le cas d'un godet unique la réaction au point O change de valeur si l'on supprime la paroi extérieure: $Q_b \neq Q_a$. Le calcul de cette réaction ne présente d'intérêt que pour la roue entière, ce qui sera fait ultérieurement.

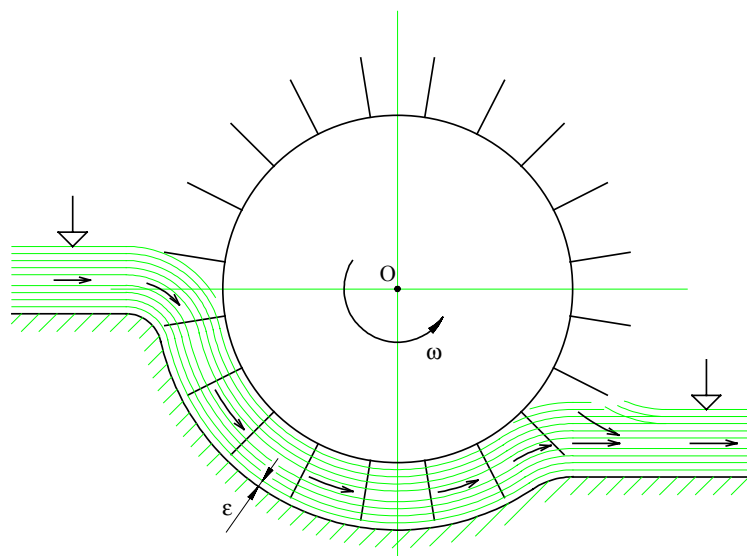
En pratique, bien entendu, les godets d'une roue hydraulique n'ont pas la forme schématique représentée sur la figure 3.5. La figure 3.6 montre un cas réel où la fonction du coursier ne concerne qu'une portion \overline{AB} , et non la totalité, de la paroi extérieure. La position du centre de gravité P de la masse d'eau étant la même que si le secteur \overline{AB} faisait partie du godet, la conclusion précédente est maintenue: aux effets du second ordre près, le rôle du coursier est identique à celui d'une paroi cylindrique appartenant au godet lui-même.

Fig. 3.6 Rôle du coursier inférieur pour un godet d'une roue hydraulique.



On peut terminer ce chapitre en évoquant les roues à palettes dont un exemple de principe est donné par la figure 3.7. Les « godets » n'ont pas de paroi extérieure (ni, le plus souvent, de parois latérales) et c'est l'enceinte même de la machine qui joue le rôle d'un coursier. Les conditions d'admission et d'évacuation de l'eau étant mal maîtrisables, les roues hydrauliques de ce type présentent un intérêt davantage historique que pratique.

Fig. 3.7 Roue hydraulique à palettes.



4 REMPLISSAGE DES GODETS

4.1 CINEMATIQUE DU REMPLISSAGE

Nous allons entreprendre une analyse simplifiée des conditions de remplissage des godets dans laquelle seuls les paramètres cinématiques seront pris en compte et en nous limitant au régime stationnaire de la roue (vitesse de rotation et puissance constantes). Les résultats obtenus seront cependant très proches de la réalité car:

- La vitesse d'injection est faible (de 1 à 3 m/s) et par conséquent les effets dynamiques ne perturbent que très peu l'écoulement avant l'entrée dans la roue, en tout cas si le canal d'entrée a une largeur égale à celle de la roue, ce que nous supposons pour le moment.
- Dans les godets qui se remplissent, par contre, les effets dynamiques sont importants mais ne jouent pratiquement pas de rôle dans l'analyse ci-après, à condition que la roue soit « lente » (concept qui sera précisé ultérieurement).

Rappelons la signification de quelques symboles définis au chapitre 2.1:

R_e, R_i, R_m = rayons extérieur, intérieur et moyen de la roue

Q = débit alimentant la roue

\vec{U}_e = vitesse périphérique ($U_e = \omega R_e$)

\vec{C} = vitesse d'injection

ω = vitesse angulaire

N_g = nombre de godets

En nous référant à la figure 4.1, introduisons les nouvelles grandeurs ci-après:

\vec{W} = vitesse relative entre \vec{C} et \vec{U}_e

β = angle relatif entre \vec{W} et \vec{U}_e

α = angle d'injection

β_g = angle d'entrée du godet

P_e, P_m, P_i = pas extérieur, moyen, intérieur des godets

$E = \overline{A_1 A_3}$ = épaisseur de la veine d'injection

$P_j = \overline{A_1 A_2} = E / \sin \alpha =$ pas d'injection

(4.1)

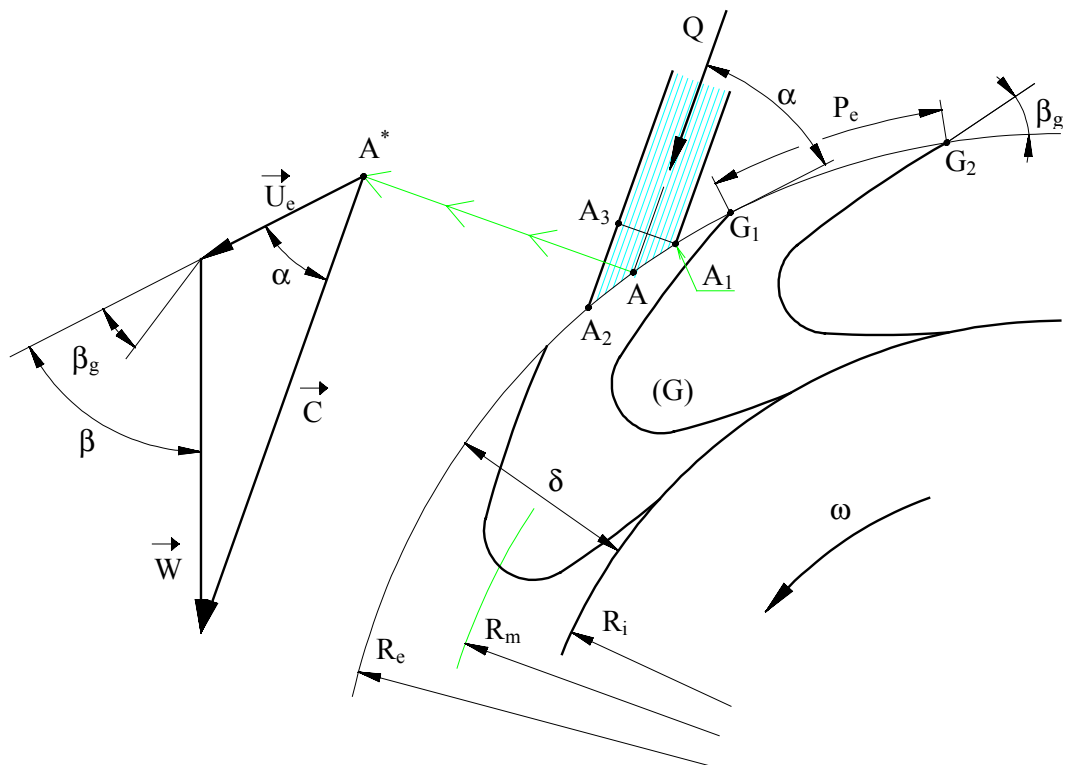


Fig. 4.1 Injection de l'eau dans la roue

Pour la clarté du dessin :

- le diagramme des vitesses au point A a été représenté au point A*,
- les angles β et β_g ont été choisis avec des valeurs nettement différentes alors qu'ils sont généralement très proches en pratique.

Comme le montrent les figures 4.1 et 4.2, le processus de remplissage d'un godet comporte trois phases:

- (I) Le point G1 du godet (G) arrive au point A1, défini par l'intersection de la veine d'injection avec le cercle extérieur de rayon R_e . Le remplissage commence et l'on admet que le débit de remplissage Q_r est proportionnel au déplacement x .

$$Q_r = \frac{x}{P_j} Q \quad \text{pour } x \leq P_j$$

- (II) Tout le débit Q entre dans le godet et l'on a donc

$$Q_r = Q \quad \text{pour } P_j \leq x \leq P_e$$

- (III) Le débit de remplissage diminue d'une manière que l'on suppose également linéaire

$$Q_r = Q \cdot \left(1 - \frac{x - P_e}{P_j}\right) \quad \text{pour } P_e \leq x \leq P_e + P_j$$

En régime stationnaire, le déplacement x du godet est proportionnel au temps

$$x = U_e t = \omega R_e t \quad (4.2)$$

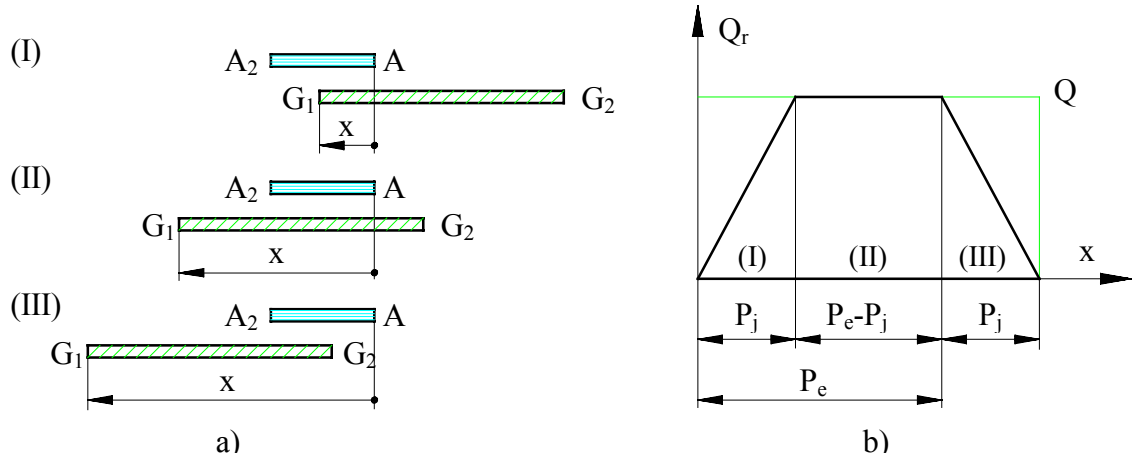


Fig. 4.2 a) les trois phases du remplissage;
b) débit de remplissage Q_r en fonction du déplacement x .

La durée totale du remplissage Δt_r est ainsi

$$\Delta t_r = \frac{P_e + P_j}{U_e} \quad (4.3)$$

Cette durée dépend du pas d'injection P_j et donc, pour un débit donné Q , de la vitesse d'injection C ainsi que de l'angle d'injection α . En effet, si B est la largeur des godets (égale à la largeur de la roue)

$$P_j = \overline{A_1 A_2} = \frac{\overline{A_1 A_3}}{\sin \alpha} = \frac{Q}{BC \sin \alpha} \quad (4.4)$$

Par contre, le volume d'eau entré dans un godet est indépendant de P_j . D'après la figure 4.2b), on a

$$\Delta V_r = \frac{Q}{U_e} \left(\frac{1}{2} P_j + (P_e - P_j) + \frac{1}{2} P_j \right)$$

$$\Delta V_r = \frac{Q P_e}{U_e} \quad (4.5)$$

Une autre expression de ce volume peut être obtenue si l'on remplace dans (4.5) le pas extérieur P_e et la vitesse U_e par leurs valeurs ci-après

$$P_e = \frac{2\pi R_e}{N_g} \quad U_e = \omega R_e$$

$$\Delta V_r = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{Q}{N_g} \quad (4.6)$$

Mais la quantité $\omega / 2\pi$ est le nombre de tours n que la roue fait par seconde, d'où finalement

$$\Delta V_r = \frac{1}{n} \cdot \frac{Q}{N_g} \quad (4.7)$$

Il était intéressant de faire l'analyse qui précède mais il est possible, naturellement, de trouver beaucoup plus rapidement le résultat ci-dessus. Le débit Q qui entre dans la roue est égal au volume ΔV_r que va contenir un godet, multiplié par le nombre de godets qui passent en une seconde sous le point A (figure 4.1). Ce nombre étant égal à (nN_g) , on obtient l'égalité $Q = \Delta V_r n N_g$, c'est-à-dire la relation (4.7).

4.2 GEOMETRIE DES GODETS – PARAMETRES DE BASE

Il est clair que la géométrie des godets joue un rôle important dans le comportement et le rendement d'une roue hydraulique par dessus. Elle fera l'objet d'une partie essentielle des études ultérieures. Au stade actuel on peut déjà mentionner les paramètres de base de cette géométrie. Plusieurs d'entre eux ont été introduits précédemment; à savoir le nombre N_g des godets, les rayons R_e , R_m , R_i , les pas P_e , P_m , la largeur δ de la couronne, la largeur B des godets (égale par hypothèse à la largeur de la roue), l'angle d'entrée β_g . D'autres paramètres à caractère global peuvent être proposés et font l'objet de ce chapitre.

La figure 4.3 représente un « godet fictif » correspondant au secteur de la couronne de la roue défini par le pas moyen. Cette figure comporte les nouvelles grandeurs:

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= \frac{2\pi}{N_g} && = \text{angle au centre du secteur} \\
 A_0 &= \frac{\pi(R_e^2 - R_i^2)}{N_g} && = \text{aire du secteur} \\
 \Delta V_0 &= A_0 B && = \text{volume du godet fictif}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

L'aire A_0 est égale au produit du pas moyen par l'épaisseur de la couronne. En effet:

$$A_0 = \frac{1}{N_g} \pi(R_e + R_i)(R_e - R_i) = \frac{1}{N_g} 2\pi R_m \cdot \delta = P_m \cdot \delta
 \tag{4.9}$$

La position relative de deux godets successifs est représentée sur la figure 4.4. Il est nécessaire d'introduire encore les grandeurs ci-dessous

$$\begin{aligned}
 \psi_g &= \text{angle au centre pour un godet} \\
 A_g &= \text{aire de la section d'un godet} && [A_g] = \text{m}^2 \\
 \Delta V_g &= \text{volume d'un godet} && [\Delta V_g] = \text{m}^3 \\
 Z_m &= \text{profondeur d'un godet mesurée sur le cercle de rayon moyen} && [Z_m] = \text{m}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

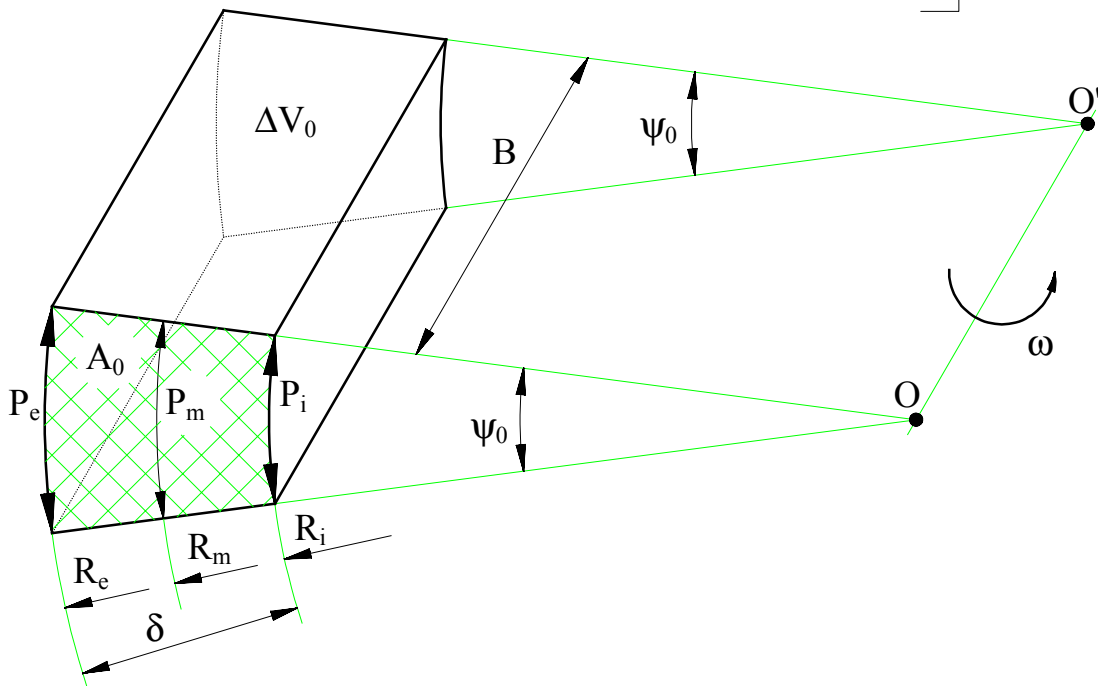


Fig. 4.3 « Godet fictif » correspondant au pas moyen.

Ainsi que le montre la figure 4.4, et c'est presque toujours le cas en pratique, en tout cas pour les roues hydrauliques par dessus, deux godets successifs « se recouvrent » ce qui implique $Z_m > P_m$ et donc $\psi_g > \psi_0$. Le recouvrement est une caractéristique constructive importante comme le montreront les études ultérieures. Il en est de même pour le rapport entre les aires A_g et A_0 , égal évidemment à celui entre les volumes ΔV_g et ΔV_0 . Nous appellerons ce rapport « *coefficient de forme des godets* ».

$$\lambda_f = \frac{A_g}{A_0} = \frac{\Delta V_g}{\Delta V_0} \quad (4.11)$$

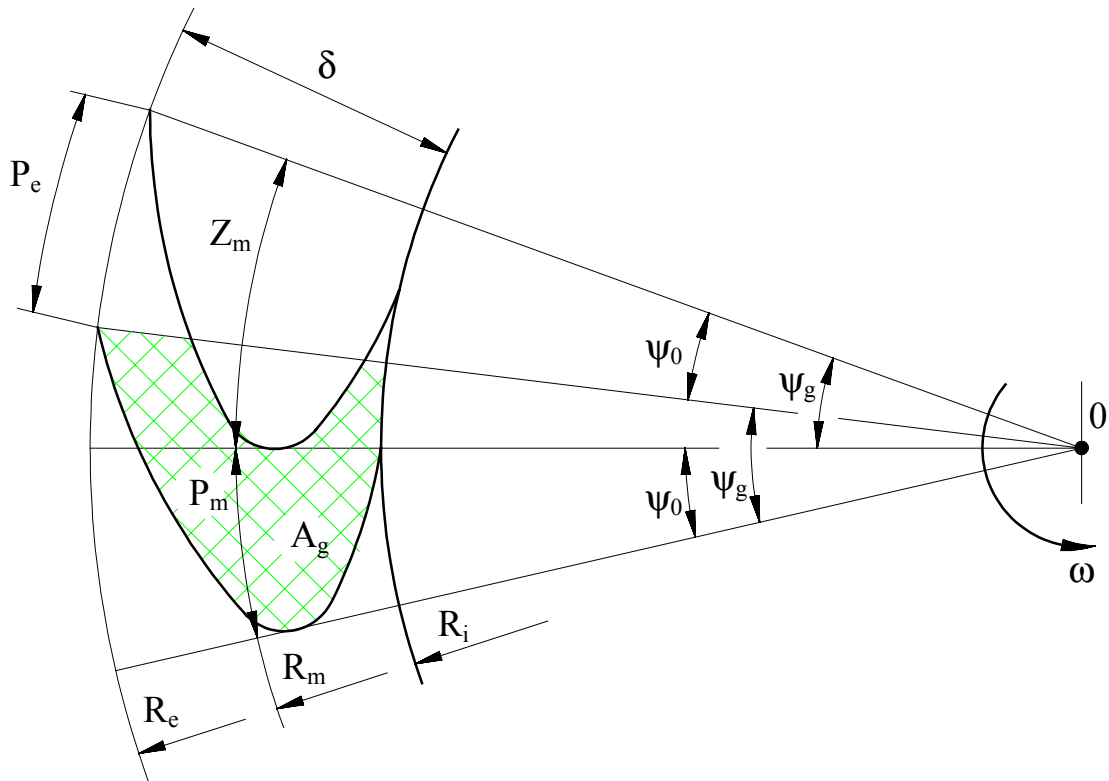


Fig. 4.4 Position de deux godets successifs, avec recouvrement.

Le cas limite $\lambda_f = 1$ n'a pas de sens pratique car alors l'eau ne peut plus entrer dans les godets.

Afin de limiter les pertes d'eau qui font baisser le rendement, il faut que le volume de remplissage ΔV_r , défini au chapitre 4.1, soit plus faible que le volume ΔV_g d'un godet. Désignons par « *coefficient de remplissage des godets* » le rapport entre ΔV_r et ΔV_g :

$$\lambda_r = \frac{\Delta V_r}{\Delta V_g} = \frac{A_r}{A_g} \quad (4.12)$$

Dans la seconde relation ci-dessus, A_r est l'aire de remplissage illustrée par la figure 4.5. Comme la surface d'équilibre de l'eau se modifie au cours de la rotation, il en est de même pour la forme de A_r .

Enfin, appelons « *coefficient d'écoulement* » le rapport entre A_r et A_0

$$\lambda_h = \frac{A_r}{A_0} = \frac{\Delta V_r}{\Delta V_0} \quad (4.13)$$

Compte tenu des définitions (4.11) et (4.12) il vient

$$\lambda_h = \lambda_f \cdot \lambda_r \quad (4.14)$$

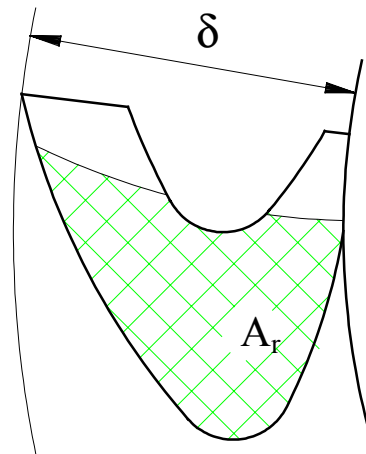


Fig. 4.5 Aire de remplissage d'un godet.

Le produit du coefficient λ_h par la profondeur δ de la couronne représente la « *profondeur équivalente d'écoulement* »

$$\delta_h = \lambda_h \delta \quad [\delta_h] = \text{m} \quad (4.15)$$

Il s'agit de la profondeur que devrait avoir un écoulement de débit Q parcourant à vitesse circonférentielle $U_m = \omega R_m$ un cercle de rayon R_m . En effet, d'après (4.7)

$$Q = n N_g \Delta V_r$$

Comme $n = \omega / 2\pi$, $N_g = 2\pi R_m / P_m$ et $\Delta V_r = \lambda_h \Delta V_0$, il vient en remplaçant ΔV_0 par sa valeur $P_m \delta B$

$$Q = (\omega R_m) \cdot (\lambda_h \delta) B = U_m \delta_h B \quad \rightarrow$$

$$\delta_h = \frac{Q}{U_m B} \quad (4.16)$$

Ce résultat justifie l'affirmation précédente. Si l'on préfère se référer à la vitesse périphérique extérieure, on peut écrire

$$\delta_h = \frac{Q}{U_e B} \left(\frac{P_e}{P_m} \right) = \frac{Q}{U_e B} \left(\frac{R_e}{R_m} \right) \quad (4.17)$$

Remarque

Le coefficient λ_h pourrait être également appelé « *coefficient de remplissage de la couronne* ».

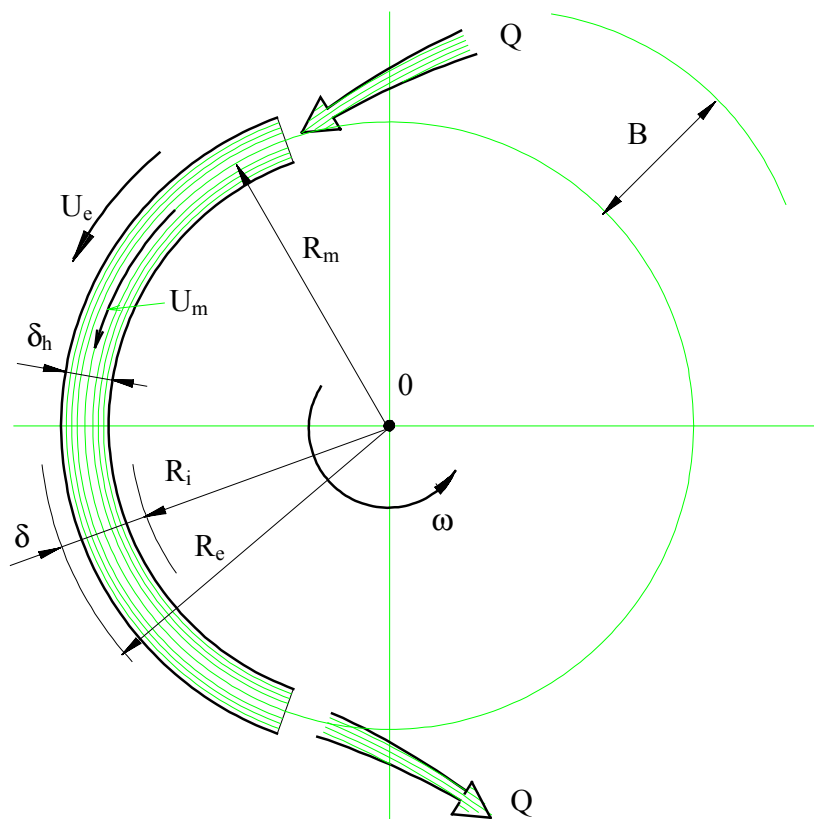


Fig. 4.6 Notion de profondeur équivalente d'écoulement $\delta_h = \lambda_h \delta$.

4.3 APPROXIMATION PARABOLIQUE

En pratique, le rapport δ/R_m entre l'épaisseur de la couronne et le rayon moyen est de l'ordre de un cinquième. (Pour la clarté du dessin, il est plus grand dans les figures qui précédent). Dès lors, en première analyse, on peut admettre que l'aire d'un godet est comprise, non pas entre deux droites faisant entre elles un angle ψ_g , selon la figure 4.4, mais entre deux droites parallèles à distance Z_m comme le montre la figure 4.7. On peut admettre par ailleurs que le profil du godet est défini par une simple parabole du 2^{ème} degré. Cette approche que nous appelons « approximation parabolique » sera utile plus tard, en particulier lors de l'étude des phénomènes hydromécaniques qui se produisent dans les godets d'une roue hydraulique par dessus.

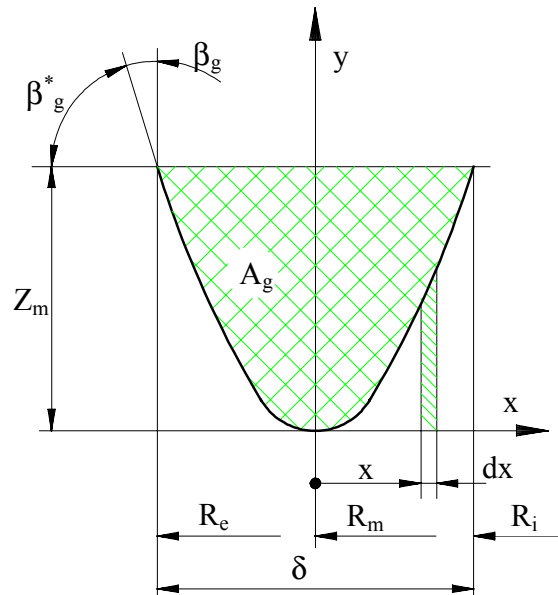
Il suffit de connaître la largeur δ de la couronne et la profondeur Z_m du profil pour déterminer la parabole. En effet, écrivons:

$$y = kx^2 \quad (4.18)$$

$$\text{Pour } x = \delta/2, y = Z_m \Rightarrow Z_m = k\delta^2/4 \rightarrow$$

$$k = \frac{4Z_m}{\delta^2} \quad (4.19)$$

Fig. 4.7 Approximation parabolique du profil d'un godet — sans recouvrement.



Sans recouvrement, l'aire de godet a pour expression

$$A_g = \delta Z_m - 2 \int_0^{\delta/2} y \, dx = \delta Z_m - 2k \int_0^{\delta/2} x^2 \, dx = \delta Z_m - \frac{k\delta^3}{12}$$

puis, en remplaçant k par sa valeur

$$A_g = \frac{2}{3} \delta Z_m \quad (4.20)$$

Calculons d'autre part l'angle d'entrée β_g . La tangente de β_g^* , complémentaire de β_g , est la dérivée de y pour $x = \delta/2$. On a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_g^* &= \frac{dy}{dx} \left(\frac{\delta}{2} \right) = 2k \frac{\delta}{2} = \frac{4Z_m}{\delta} \quad \Rightarrow \\ \operatorname{tg} \beta_g &= \frac{\delta}{4Z_m} \end{aligned} \quad (4.21)$$

En général, comme nous l'avons dit précédemment, les profils de deux augets successifs se recouvrent (figure 4.8). L'aire de la section d'un godet devient alors, par (4.20)

$$A_g = \frac{2}{3} \delta Z_m - \frac{2}{3} \delta_2 Z_2$$

Sur le plan constructif, la grandeur qui caractérise le recouvrement est la profondeur Z_2 . Il faut donc exprimer la largeur δ_2 en fonction de Z_2 , soit, d'après (4.18) et (4.19)

$$\begin{aligned} Z_2 &= k \left(\frac{\delta_2}{2} \right)^2 \quad \rightarrow \quad \delta_2 = 2 \sqrt{\frac{Z_2}{k}} \\ \delta_2 &= \delta \sqrt{\frac{Z_2}{Z_m}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

L'aire du profil devient ainsi

$$\begin{aligned} A_g &= \frac{2}{3} \delta Z_m - \frac{2}{3} \delta \sqrt{\frac{Z_2}{Z_m}} Z_2 \\ A_g &= \frac{2}{3} \delta Z_m \left(1 - \frac{Z_2}{Z_m} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_m}} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

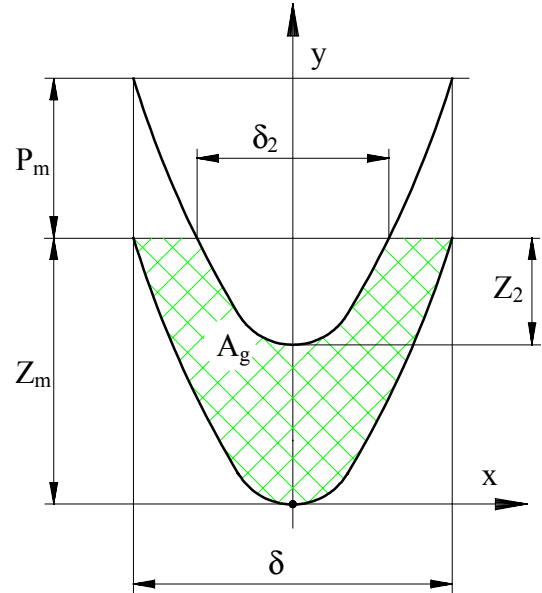
En introduisant le « coefficient de recouvrement » ρ

$$\rho = \frac{Z_2}{Z_m} \quad (4.24)$$

la relation (4.23) prend la forme mieux lisible

$$A_g = \frac{2}{3} \delta Z_m (1 - \rho \sqrt{\rho}) \quad (4.25)$$

Fig. 4.8 Approximation parabolique — avec recouvrement



Remarque

Alors que le résultat ci-dessus n'est valable que pour l'approximation parabolique, la définition de ρ peut être adoptée pour toute forme du profil.

A titre d'exemple d'application de l'approximation parabolique, nous allons calculer le coefficient de forme λ_f défini au chapitre 4.2 en fonction du rapport entre le pas moyen P_m et la profondeur Z_m . Pour simplifier l'écriture, appelons ce rapport ε

$$\varepsilon = \frac{P_m}{Z_m}$$

(a) Sans recouvrement, donc pour $Z_m = P_m$, il vient d'après (4.11) et (4.20)

$$\lambda_f = \frac{A_g}{A_0} = \frac{2/3\delta Z_m}{\delta P_m} = \frac{2}{3\varepsilon} \quad \text{pour } \varepsilon = 1$$

(b) Avec recouvrement, soit pour $Z_m \geq P_m$, on a par (4.23)

$$\lambda_f = \frac{2/3\delta Z_m}{\delta P_m} \left(1 - \frac{Z_2}{Z_m} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_m}} \right)$$

Mais $Z_2 = Z_m - P_m = Z_m (1 - \varepsilon)$, d'où

$$\lambda_f = \frac{2}{3\varepsilon} \left[1 - (1 - \varepsilon) \sqrt{1 - \varepsilon} \right] = \frac{2}{3\varepsilon} \left[1 - (1 - \varepsilon)^{3/2} \right] \quad \text{pour } \varepsilon \leq 1$$

Ce résultat, représenté sur la figure (4.9), demande quelques commentaires

- 1) Si le pas moyen P_m tend vers zéro, le coefficient λ_f tend vers un, ce que l'on démontre facilement. Ce cas n'a pas de sens pratique car l'eau ne peut plus entrer dans les godets.
- 2) De toute façon pour les très petites valeurs de ε il n'est plus possible de négliger le rôle de l'épaisseur des parois des godets, comme nous l'avons fait dans cet exemple. En réalité la fonction $\lambda_f(\varepsilon)$ ne tend pas vers un, mais vers zéro (courbe indiquée (c) sur la figure 4.9).
- 3) Cependant, comme le montreront les études ultérieures, les faibles valeurs de ε sont plus favorables que les grandes pour un bon rendement de la roue.

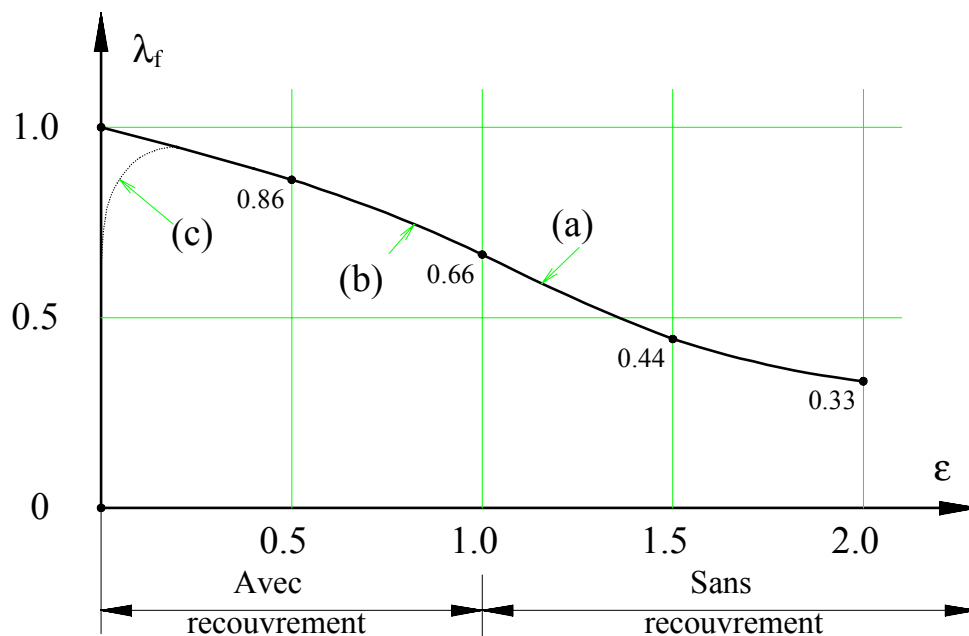


Fig. 4.9 Coefficient de forme λ_f en fonction du rapport $\varepsilon = \frac{P_m}{Z_m}$